

PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR EN EDUCACIÓN BÁSICA

ALGEBRAIC AND DIDACTIC THINKING OF SCHOOL ALGEBRA IN BASIC EDUCATION

Franzyuri F. Hernández F.

franzyurihernandez@gmail.com

ORCID 0000-0002-2748-8005

Zoraida C. Villegas M.

zcvillegas@gmail.com

ORCID 0000-0003-1507-446X

Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Valencia. Venezuela

Recibido: 12/07/2019 - Aprobado: 15/11/2019

Resumen

Se aborda una postura sobre áreas del conocimiento que el positivismo ha conducido fragmentariamente, tales como: educación matemática, pensamiento algebraico y didáctica del álgebra escolar; desde la visión de educación básica. Se muestra como el álgebra escolar, a partir de la historia, es una de las áreas fundamentales a ser desarrollada en educación matemática, con una forma particular de ser enseñada y aprendida, denominada didáctica del álgebra, y desde la cual se promueve el pensamiento algebraico, mostrando su evolución con respecto al aritmético. Se presenta, una manera de enseñar y aprender álgebra para desarrollar el pensamiento algebraico partiendo de sus elementos, como: símbolos, abstracciones, lenguaje, expresiones, generalizaciones y la aritmética, entre otros. Finalmente, los autores muestran sus reflexiones.

Palabras clave: pensamiento algebraico, aritmética, didáctica, álgebra, educación matemática.

Abstract

A position is addressed on areas of knowledge that positivism has led fragmentarily, such as: mathematical education, algebraic thinking and didactics of school algebra; from the vision of basic education. It shows how school algebra, based on history, is one of the fundamental areas to be developed in mathematics education, with a particular way of being taught and learned, called algebra didactics, and from which algebraic thinking is promoted, showing its evolution with respect to arithmetic. It is presented, a way of teaching and learning algebra to develop algebraic thinking starting from its elements, such as: symbols, abstractions, language, expressions, generalizations and arithmetic, among others. Finally, the authors showed their reflections.

Keywords: algebraic thinking, arithmetic, didactics, algebra, mathematics education.

Introducción

La Educación Matemática se concibe como una disciplina encargada de estudiar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela, además de ser un campo para el desarrollo de investigaciones en distintas áreas y disciplinas que conforman la matemática escolar tal como el álgebra, la cual, según el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), se propone como uno de los cinco bloques de contenido, junto con números y operaciones, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad para trabajar con los niños desde los primeros grados (Aké, Godino y Gonzato, 2013). De esta manera, se entiende al álgebra escolar como una de las áreas y niveles fundamentales a ser desarrollada dentro de la Educación Matemática, con una forma particular de ser enseñada y aprendida, denominada para estos efectos como didáctica del Álgebra, y desde la cual se promueve lo que se conoce como el Pensamiento Algebraico. Ahora bien, para introducirse en el álgebra escolar, habrá que partir de un punto de referencia el cual según autores como Kieran y Filloy (1989), se encuentra en el Pensamiento Aritmético.

En ese sentido, Kieran y Filloy (ob. cit.) expresan, "*Los adolescentes, al comenzar el estudio del Álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en Aritmética. Sin embargo, el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética*" (p. 229). Es decir, si bien ciertamente la base aritmética que poseen los estudiantes será de gran apoyo, no se debe considerar de manera lineal la consolidación del Pensamiento Algebraico como una estricta y necesaria continuidad del aritmético pues en este caso el Pensamiento Algebraico evoluciona a otros niveles de complejidad.

En ese orden, según Aké, Godino y Gonzato (2013), "*El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y*

regularidades en cualquier aspecto de las Matemáticas". (p. 40). Por ello es necesario entender que el desarrollo del Pensamiento Algebraico va mucho más allá de las operaciones concretas que se desarrollan en la Aritmética abstrayendo de lo concreto y/o concretando de lo abstracto, como lo plantea Agudelo (2013), "*Pensar algebraicamente, en el contexto del análisis de situaciones de la vida real, requiere ir más allá de la simple identificación de hechos y realización de cálculos con números específicos*" (p. 3). De tal manera resulta importante entender, aunque el Pensamiento Algebraico puede tener como base el Aritmético, debe ser desarrollado con la aplicación de una metodología específica concebida a través de la didáctica del Álgebra Escolar.

No obstante, es bien sabido en particular, el Álgebra representa una dificultad que muchos no superan ni aún después de muchos años de vida escolar, lo que se va consolidando en el propio individuo y sociedad como una barrera para el desarrollo humano contribuyendo a generar mitos contra ella. Para Martínez (2014), "*El mito de ser pensada como la asignatura más impopular del currículo, mantiene vigente la posibilidad de acrecentar, entre otros aspectos, miedo, odio, rabia, angustia, desmotivación y desinterés por la Matemática*" (p. 13), y ante una situación de posible animadversión, se puede acrecentar la falta de disposición para aprenderla sin más explicación que su presunta dificultad desconociendo que de alguna manera el razonamiento matemático como el algebraico se puede considerar algo natural en el ser humano.

Desde esa perspectiva, la posible dificultad en el aprendizaje del Álgebra y desarrollo del Pensamiento Algebraico, pudiera ser una situación de didáctica, por lo que le corresponde a ella dar respuesta a ese hecho como el campo de estudio de la Educación Matemática. A ese respecto, González (2017), plantea las deficiencias detectadas en la didáctica venezolana del Álgebra

... importantes insuficiencias teóricas y prácticas, ante lo cual emergió la necesidad de hacer una revisión de este ámbito específico de la Educación Matemática tomando en cuenta los aspectos didáctico e investigativo con el propósito de coadyuvar a la visibilización del Álgebra Escolar. (p. 8)

Esta realidad implica la necesidad de desarrollar investigaciones tendentes a reforzar la didáctica del Álgebra desde edades tempranas para así vencer los posibles obstáculos que dificultan su aprendizaje y el desarrollo del razonamiento y Pensamiento Algebraico como una necesidad del ser humano.

Ahora bien, para desarrollar el Pensamiento Algebraico desde una didáctica del Álgebra, los docentes y estudiantes deberán transitar un camino durante sus años de vida escolar en los cuales los primeros serán mediadores del proceso aplicando un amplio conjunto de elementos como teorías, estrategias, técnicas, recursos y medios instruccionales conformando parte de la didáctica en general para facilitar la transición cognitiva hacia el desarrollo del Pensamiento Algebraico. Para Serres (2010), "*El objetivo del Álgebra Escolar es desarrollar el razonamiento o Pensamiento Algebraico*" (p. 126), y ello será posible haciendo uso de una metodología definida en la didáctica del Álgebra.

Breve reseña histórica del Álgebra

Edad Antigua

Sus raíces se ubican en la antigua matemática babilónica, donde se había desarrollado un avanzado sistema aritmético con el que los pueblos de Mesopotamia (actual Irak) fueron capaces de hacer cálculos en una forma

algorítmica. Con este sistema lograron encontrar fórmulas y soluciones para resolver problemas que hoy en día suelen resolverse mediante ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado y ecuaciones indeterminadas (Lewy, 1951). En contraste, la mayoría de los egipcios de esta época y matemáticos griegos y chinos del primer milenio antes de Cristo, normalmente resolvían tales ecuaciones por métodos geométricos, como los descritos en el Papiro de Rhind, los Elementos de Euclides y los Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático. (Struik, 1987).

En la Antigua Grecia, los matemáticos introducen un Álgebra donde los términos se representaban mediante los lados de objetos geométricos, y a estas líneas asociaban letras (Boyer, 1986 p. 258). Los helénicos Herón de Alejandría y Diofanto, así como también los matemáticos indios como Brahmagupta, continuaron las tradiciones egipcias y babilónicas, aunque la Arithmetica de Diofanto y el Brahmasphutasiddhanta de Brahmagupta se hallan a un nivel de desarrollo mucho más alto. Como ejemplo de ello, la primera solución aritmética completa (incluyendo al cero y soluciones negativas) para ecuaciones cuadráticas fue descrita por Brahmagupta en su libro *Brahmasphutasiddhanta*. Más tarde, los matemáticos árabes y musulmanes desarrollarían métodos algebraicos a un grado mucho mayor de sofisticación. Diofanto (siglo III d. C.), fue un matemático alejandrino, autor de una serie de libros intitulados Arithmetica. Estos textos tratan de las soluciones a las ecuaciones algebraicas.

Edad Moderna

La Edad Moderna representó una época de innumerables innovaciones para el Álgebra alcanzándose resultados que superan los obtenidos por los árabes,

persas, indios o griegos. Parte de este avance viene del estudio de las ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado. Las soluciones para ecuaciones polinómicas de segundo grado ya eran conocidas por los matemáticos babilónicos cuyos resultados se difundieron por todo el mundo antiguo. El descubrimiento de soluciones algebraicas de tercer y cuarto orden tiene lugar durante el siglo XVI en Italia. De igual manera merece hacerse notar la definición de determinante descubierta por el japonés Kowa Seki en el siglo XVII, seguido más tarde por Gottfried Leibniz con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas con matrices (Boyer, 1986).

Más tarde, entre los siglos XVI y XVII se consolida la noción de número complejo, otorgándole al Álgebra una cierta distancia de las cantidades medibles, en el siglo XVIII Gabriel Cramer hizo su aporte con el trabajo sobre matrices y determinantes, también Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Adrien-Marie Legendre y numerosos matemáticos del siglo XVIII hicieron avances notables en Álgebra. Así se llega al siglo XIX cuando se desarrolla el Álgebra abstracta inicialmente centrada en lo que hoy se conoce como teoría de Galois y en temas de la constructibilidad. La búsqueda de una fundamentación matemática rigurosa y una clasificación de los diferentes tipos de construcciones matemáticas llevaron a crear áreas del Álgebra abstracta durante el siglo XIX absolutamente independiente de nociones aritméticas o geométricas (lo cual no había sucedido con el Álgebra de los siglos anteriores). Esta línea del tiempo ayuda a consolidar la idea de que el Álgebra históricamente ha ido adquiriendo una identidad propia, con su propio lenguaje, métodos que la identifican como un área y disciplina matemática con un objeto de estudio bastante preciso, lo cual se ha venido consolidando a través del tiempo.

El Pensamiento Algebraico, ¿Qué es?, ¿Cuál es su naturaleza? y ¿Cómo se desarrolla?

Hablar de Pensamiento Algebraico, implica en primera instancia entender en qué consiste para luego considerar de qué manera se puede desarrollar. Entonces, se trata de asignarle al pensar la cualidad algebraica, para lo cual es necesario entender lo que es, o no es algebraico, y ello inicia por definir formalmente que es el Álgebra en el campo de la Matemática. En el diccionario de la Real Academia Española (2019), la palabra Álgebra tiene dos acepciones;

1. f. Parte de las Matemáticas que estudia estructuras abstractas en las cuales, mediante números, letras y signos, se generalizan las operaciones aritméticas habituales, como la suma y el producto. 2. f. Arte de restituir a su lugar los huesos dislocados.

Sin embargo, estas definiciones terminan siendo aún bastante vagas lo cual no contribuye de manera significativa para la comprensión actual del concepto, de hecho, la definición número dos (2) está en desuso.

Para Baldor (1980), "*Álgebra es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible*" (p. 5); de este concepto, y de la definición de la Real Academia, ha de rescatarse el proceso de la generalización como una cualidad de lo algebraico. Es decir, la visión generalizada se concibe como una forma algebraica de considerar elementos matemáticos, por consiguiente, la generalización viene siendo una condición del Pensamiento Algebraico. Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), por su parte refuerzan esa idea cuando expresan la existencia de consenso en cuanto a considerar que;

... uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es su manera de abordar los procesos de generalización matemática, esto es, estudios en los que se pasa de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos... a las clases de tales objetos. (p. 489).

De tal manera, se refuerza, una de las características del Pensamiento Algebraico sería la generalización por cuanto es una de las propiedades del Álgebra como rama de la Matemática, pero como ya se dijo, quedarse en la definición de Baldor (ob. cit.) sería limitarse considerando otros procesos que se concretan en el Álgebra y por consiguiente también deben ser parte del Pensamiento Algebraico.

En tal sentido, Kieran y Filloy (1989) trascienden ese concepto diciendo, "*para una caracterización significativa del Pensamiento Algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente*" (p. 165). Dicho de otro modo, el pensamiento generalizado como una manifestación algebraica, debe ser expresado de manera observable, para así, se asuma la presencia de esa característica del pensamiento, esto es, si la expresión presuntamente algebraica se queda solo en el pensar, no se podrá verificar su existencia, y eso solo se constata una vez que el sujeto lo expresa. Para reforzar esta afirmación, se considera lo dicho por Fernández y López (2014), cuando aseguran que "*El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades y, para ello, el uso de símbolos y de expresiones literales se convierte en una herramienta necesaria para la resolución de problemas y la modelización de situaciones diversas*" (p. 2).

En este caso, Fernández y López (ob. cit.) amplían el espectro de procesos llevados a cabo en Álgebra los cuales por consiguiente deberían estar presentes en el Pensamiento Algebraico, ellos son: generalización, representación, formalización de patrones, simbolización y modelización. Esta aseveración, conduce a pensar que el desarrollo del Pensamiento Algebraico se debe dar de manera gradual en virtud de que todos esos procesos no ocurren de manera simultánea, algunos son más avanzados o algunos de ellos servirán de base para los otros. En ese sentido, Godino y otros (2012), dicen que *“La presencia de los objetos y procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva”* (p. 487), lo cual induce a que la evolución del Pensamiento Algebraico pudiera tener distintas etapas, y en el transcurso de su desarrollo, se van complementando, además, son todas necesarias en mayor o menor grado.

En la misma idea de Kieran y Filloy (ob. cit.), si bien la generalización y formalización de patrones pudieran ser procesos del Pensamiento Algebraico, el individuo debe ser capaz de evidenciarlos, y es allí cuando hace uso de la representación, simbolización y modelización como expresiones tangibles y observables del mismo. Esos tres procesos, se ubican en un estadio más avanzado que el de generalización y tal vez por esa razón, existe una clara tendencia en las estructuras curriculares a abordar la enseñanza del Álgebra desde educación secundaria, lo cual dificulta aún más su aprendizaje, así como el desarrollo del Pensamiento Algebraico. Sin embargo, un grupo importante de autores coinciden en la necesidad de incorporar su estudio y práctica desde los más bajos niveles de la escuela básica de manera que desde la escuela temprana el estudiante tenga la oportunidad de abordar los elementos algebraicos permitiéndole desarrollar su pensamiento, aprender de manera más efectiva y mejorar su rendimiento en las Matemáticas.

Respecto a la simbolización como uno de los procesos del Álgebra y elemento del Pensamiento Algebraico, Gómez (1997), aporta "*El uso de la notación mediante letras posibilita la independencia con respecto al objeto que se representa, el símbolo cobra entonces un significado que va más allá del objeto simbolizado*" (p. 208). De igual manera, según González (2017), "*... para comunicar ideas matemáticas el símbolo es insustituible, no es posible hacerlo sin recurrir a él...*" (p. 17). Según estos autores, el símbolo como elemento y por consiguiente la simbolización como proceso, conforman no solo un elemento fundamental del Álgebra, sino que así mismo debe ser del Pensamiento Algebraico por cuanto esto le permitirá al sujeto de alguna manera desprenderse o independizarse del objeto a través de su representación simbólica.

Del Pensamiento Aritmético al Pensamiento Algebraico

Algunos autores consideran que el Pensamiento Aritmético es previo al algebraico, entre ellos, Kieran y Filloy (1989), manifiestan que:

Los adolescentes, al comenzar el estudio del Álgebra, traen consigo las nociones y los enfoques que usaban en Aritmética. Sin embargo, el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética. Aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en la Aritmética. El Álgebra requiere un cambio en el pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. (p. 229).

En efecto, como comentan los autores citados, cabe recordar que los estudiantes a nivel de secundaria ya han transitado unos cuantos años de

escolaridad en los cuales necesariamente han compartido un conjunto de contenidos de matemática elemental, en su mayoría relacionados con Aritmética, lo cual les proporciona una base de conocimientos los cuales en alguna medida dependerán de la didáctica utilizada para estos efectos. De igual manera, los autores una vez más manifiestan la idea ya desarrollada en apartado anterior en la cual se refuerza el hecho de que el Pensamiento Algebraico va mucho más allá de la mera generalización.

Por otro lado, Bednarz, Kieran y Lee (1996), proponen "*el Álgebra no es solo una extensión del dominio numérico... La historia proporciona una advertencia sobre ver Álgebra simplemente como una extensión de Aritmética*" (p. 34). Esa reflexión, conduce a ser cautelosos cuando se pretende ver quizá de manera simplista que el Pensamiento Algebraico es necesariamente una continuación o posible evolución del Pensamiento Aritmético lo cual no necesariamente es una condición 'sin equa non'. Es así como se asume que, en niveles de complejidad, las operaciones aritméticas tienden a ser menos complejas que las algebraicas, por cuanto en si misma se desarrollan con valores más precisos y concretos.

En ese orden de ideas, se deriva la premisa, si el conocimiento aritmético es menos complejo que el algebraico, por consecuencia lo mismo ha de ocurrir con el Pensamiento Aritmético ante el Pensamiento Algebraico. Entonces se habla de una transitoriedad de la Aritmética al Álgebra para lo cual se plantea la propuesta dada a conocer como preálgebra, una nueva corriente para la matemática escolar refiriéndose al Pensamiento Aritmético como transitorio hacia el algebraico. Así lo plantea Zapatera (2018), cuando expresa "*La preálgebra intenta suavizar la transición entre la Aritmética y el Álgebra y reducir las dificultades que sufren los alumnos en el aprendizaje del Álgebra...*" (p. 53). Desde esta visión, se asume entonces que el Pensamiento Aritmético

es previo o por lo menos más sencillo, pero no estrictamente prerrequisito para avanzar al algebraico y ello sirve como punto de referencia para una didáctica del Álgebra.

Por otro lado, en virtud de esa transitoriedad de la Aritmética como lenguaje, como operación y como pensamiento hacia lo algebraico, y en esa visión de preálgebra, Butto y Rojano (2004), expresan:

La transición de la Aritmética al Álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolarizadas. Sin embargo, presenta obstáculos que la mayoría de los adolescentes encuentran muy difíciles de superar. Esto se debe, en parte, a que este contenido matemático se enseña por lo general a partir de fuentes limitadas de significados; usualmente se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos, como, el geométrico. (p. 114).

Esta postura de Butto y Rojano (ob. cit.), apunta a que de alguna manera se simplifica la enseñanza y el aprendizaje de la Aritmética omitiendo fuentes y contenidos importantes los cuales posteriormente tienden a dificultar el desarrollo del Pensamiento Algebraico.

Britt e Irwing (2008), manifiestan, mucho se ha escrito sobre las dificultades encontradas durante la transición de la Aritmética al Álgebra, pero como Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest (2006) discuten, "*la aceptación de tal transición surge de una visión empobrecida de las matemáticas elementales en el que se pospone la generalización matemática hasta el inicio de la instrucción de Álgebra*" (p. 95). Dicho de otra manera, se mantiene la idea de que la Matemática pre-algebraica que se maneja desde la Aritmética tiene

bajos niveles de contenidos los cuales no favorecen en lo absoluto la transición al Pensamiento Algebraico.

Es oportuno recordar, desde el inicio de este escrito se comenzó con la caracterización de una idea que orientara el camino hacia una manera de enseñar y aprender el Álgebra, y por supuesto desarrollar el Pensamiento Algebraico, ese camino es la Didáctica para alcanzar ese propósito concretada en una didáctica del Álgebra y el desarrollo del Pensamiento Algebraico. Esa didáctica en virtud de lo que se ha venido planteando debe contemplar el enriquecimiento desde la Aritmética englobando otros niveles desde edades tempranas en la educación básica. Así como lo plantea González (2017), *"Desde el punto de vista didáctico destacamos el enfoque de la iniciación temprana al Álgebra puesto que hace posible la convergencia de contenidos aritméticos, geométricos y algebraicos entrelazados hacia el desarrollo del Pensamiento Algebraico"* (p. 32).

Desde la perspectiva de González (2017), partiendo de los más tempranos niveles educativos y edades, deben converger en el aula, contenidos y saberes abordando las distintas ramas relacionadas con las Matemáticas, para así favorecer el pensamiento y aprendizaje algebraico. Efectivamente, no es una determinante que el Pensamiento Algebraico este solamente impregnado y proyectado por Pensamiento Aritmético, sino más bien pudieran estar presentes y por ende favorecerse abarcando elementos de la Geometría entre otras conteniendo una gran cantidad de elementos algebraicos. De tal manera, al considerar formalmente una didáctica del Álgebra, sería necesario tomar en cuenta no solo el Álgebra misma, sino además otros contenidos y áreas que la contienen. Para Torres, Valoyes y Malagón (2002), *"... es a partir del trabajo numérico y geométrico (entiéndase de la Aritmética y la Geometría), en*

diferentes contextos que los estudiantes logran, encontrarle un sentido al lenguaje simbólico e iniciarse en el Álgebra" (p. 233).

A manera de cierre, se comparte lo planteado por Valdivie (2011), en las posturas de otros teóricos en relación con la vinculación entre la Aritmética y el Álgebra. Entre ellos: Warren (2003), dice la mayoría de las investigaciones realizadas en relación con la enseñanza del Álgebra se centran en la Aritmética como acceso clave al Álgebra y consecuencia de la intensa relación existente entre ambas. Drijvers y Hendrikus (2003), consideran el Álgebra tiene sus raíces en la Aritmética, mientras la Aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Para Gómez (1995), el Álgebra generaliza a la Aritmética y la Aritmética, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis. Hewitt (1998) y Mason, Graham y Johnston–Wilder (2005), el Álgebra, o el Pensamiento Algebraico, subyacen a la Aritmética. Al respecto, Molina (2006) indica "*la Aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el Álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado*". (p. 90).

¿Por qué una didáctica del Álgebra Escolar?

En virtud de las consideraciones abordadas en este desarrollo, en adelante se tendría las condiciones mínimas para plantearse una posible manera de enseñar y aprender el Álgebra y por ende aproximarse a una didáctica de la misma para el desarrollo del Pensamiento Algebraico partiendo de los elementos intrínsecos que le son propios como los símbolos, las abstracciones, el lenguaje, las expresiones, las relaciones, la nomenclatura, las generalizaciones, el análisis, los significados, notaciones, fórmulas, ecuaciones y por supuesto la misma Aritmética entre otras. Tomando en

cuenta todos esos elementos, se pudiera decir; el Álgebra como área y como disciplina, tiene una forma propia de ser abordada y por consiguiente de ser enseñada y aprendida, lo cual pudiera conducir a una epistemología del Álgebra como una forma muy particular de producir saberes y constructos cognitivos dentro del área de la Matemática.

A ese respecto, existen algunas propuestas orientadas a desarrollar una didáctica desde los inicios de la vida escolar en educación primaria. Socas (2011), comenta en relación a ello dos de esas propuestas:

... podemos considerar que las propuestas de Pre-Álgebra y de 'Early-Algebra' de incorporar el Álgebra al currículo de la educación primaria tienen como finalidad ayudar al desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, facilitando la transición de la Aritmética al Álgebra ... (p. 27).

Por su parte Rojano (1994), aporta puntuales observaciones respecto a un conjunto de investigaciones en el campo del lenguaje matemático como parte de las reformas curriculares con miras a mejorar el aprendizaje del Álgebra:

Uno de los efectos más notorios sobre las mencionadas reformas educativas se observa en el tratamiento específico y muy detallado de temas o nociones matemáticas que la investigación demostraba que requerían de tiempos didácticos muy prolongados y de ciertas condiciones de maduración cognitiva de los alumnos. Así, aparte de las ventajas que representa el tener en cuenta los obstáculos y dificultades inherentes al aprendizaje de un cierto concepto matemático, ... el enfoque conceptualista se enfrenta también con el problema de acoplar los mencionados tiempos

didácticos a los tiempos reales de los ciclos escolares ...
(p. 46).

En ese orden de ideas, ha de reflexionarse en cuanto a que las distintas áreas del conocimiento tienen formas y maneras de ser aprehendidas según su naturaleza y dentro de una misma área los distintos contenidos de igual manera requerirán distintos procesos y tal vez diferentes lapsos de aprendizaje en función de distintos niveles de maduración cognitiva.

Por otro lado, en virtud de las diferencias de cada área según su naturaleza y objeto, Camilloni (2014), plantea "*La Didáctica General y las Didácticas de las disciplinas son necesarias unas a las otras*" (p. 2). Esto implica, cada área del conocimiento empleará un conjunto de estrategias, técnicas, medios, procedimientos, teorías y enfoques que al final configuran la didáctica de esa disciplina. Al plantear la didáctica de las disciplinas Camilloni (ob. cit.) propone:

Didácticas específicas de las disciplinas: didáctica de la Matemática, de la Lengua, de las Ciencias Sociales, de las Ciencias Naturales, de la Educación Física, del Arte, etcétera. Estas divisiones, a su vez, dan lugar a subdivisiones que alcanzan niveles crecientes de especificidad, tales como didáctica de la enseñanza de la lectoescritura, didáctica de la educación en valores, didáctica de la educación técnica, didáctica de la Música, didáctica de la Natación o didáctica del inglés como segunda lengua. (p. 3).

En ese mismo sentido, si se identifica claramente el objeto de estudio del Álgebra y los elementos inherentes a ella, además de entender cómo funcionan mentalmente los procesos matemáticos, también debe existir una

didáctica del Álgebra. De tal manera, se trata de consolidar didácticamente una forma eficaz y efectiva de enseñar y aprender la Matemática y en particular el Álgebra con intención de desarrollar el Pensamiento Algebraico.

Reflexiones finales de los autores

Sin intención de fijar una postura definitiva, y reconociendo las debilidades que obligan a una revisión exhaustiva de la temática abordada en este ensayo, se considera la didáctica del Álgebra Escolar como un área de obligatoria investigación y aplicación por parte de los participantes que se forman en Educación Matemática. Esa postura, en función de que la Matemática, así como el lenguaje son dos procesos y formas de expresión y relación inherentes al ser humano en toda actividad que desarrolló durante su vida. De la misma manera, el Pensamiento Algebraico es una función casi natural en las personas en la medida en que cada ser hace abstracciones y simbolizaciones del mundo que los rodea para relacionarse con el resto de los sujetos sociales y para aprender de su entorno.

Teóricamente, así lo plantea John Dewey desde 1892 en la primera escuela de Chicago cuando hace referencia al Pragmatismo social el cual se engrana con el Interaccionismo Simbólico para explicar los procesos de aprendizaje social. En tal sentido, los significados son manejados en la persona y en el grupo en forma de símbolos, esto es, en imágenes, representaciones y conceptos que, si por una parte guían las interacciones, por otra son producto de esas mismas interacciones (Moreno, 2013). Si bien ciertamente esta cita no se relaciona directamente con la Matemática, lo que se desea denotar es la naturaleza simbólica y representativa de las relaciones humanas para reforzar la idea de

ser una condición natural del sujeto y, por consiguiente, tiende a ser innata esa manera de pensar.

Pero en este caso en particular, se trata de educar, enseñar y aprender para desarrollar ese pensamiento en la escuela formal bajo una dinámica diseñada con ese propósito en una didáctica del Álgebra Escolar para el desarrollo del Pensamiento Algebraico, lo cual mientras más temprano se practique en la escuela tanto mejor será para el estudiante, para las matemáticas y para la sociedad en general.

Referencias

- Agudelo, C. (2013). "La creciente brecha entre las disposiciones educativas colombianas, las proclamaciones oficiales y las realidades del aula de clase: Las concepciones de profesores y profesoras de matemáticas sobre el álgebra escolar y el propósito de su enseñanza". *REICE*. (Vol. 5, No. 1).
- Aké, L., Godino, J. y Gonzato, M. (2013). "Contenidos y actividades algebraicas en educación primaria". *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. (Vol. 33, p. 39–52).
- Baldor, A. (1980). *Álgebra*. Madrid: Cultural Centroamericana, Ediciones y Distribuciones Codice, S. A.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). "Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching". *Mathematics Education Library*. (Vol. 18). Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Editorial Alianza.
- Britt, M. e Irwin, K. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A three-year longitudinal study. *ZDM Mathematics Education*. (Vol. 40, p. 39–53).
- Butto, C. y Rojano, T. (2004). "Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría". *Educación Matemática*. (Vol. 16, N° 1, p. 113–148).

- Camilloni, A. (2014). *Didáctica general y didácticas específicas*. Disponible en: <http://www.palermo.edu/ACI/trabajos/Alicia-Camilloni.pdf> [10/03/2019].
- Carraher, D., Schliemann, A., Brizuela, B. y Earnest, D. (2006). "Arithmetic and algebra in early mathematics education". *Journal for Research in Mathematics Education*. (Vol. 37, N° 2, p. 87-115).
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis Doctoral no publicada. Utrecht, Los Países Bajos: Utrecht University.
- Fernández, J. y López, E. (2014). *Introducción al álgebra*. Documento disponible en: http://www.xeix.org/IMG/pdf/introduccion_al_algebra_1o.pdf [10/02/2019].
- Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). "Naturaleza del razonamiento algebraico elemental". *Bolema*. (Vol. 26, N° 42B, p. 483-511).
- Gómez, B. (1995). "Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa". *Suma*. (Vol. 20, p. 61-68).
- Gómez, C. (1997). Hacia una epistemología del conocimiento escolar: El caso de la educación matemática. (p. 195-215).
- González, A. (2017). "Aspectos conceptuales y didácticos del pensamiento algebraico". *ARETÉ: Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*. (Vol. 3, N° 5, p. 7-38). Disponible en: http://saber.ucv.ve/ojs/index.php/rev_arete/article/view/12880 [10/02/2019]
- Hewitt, D. (1998). "Approaching arithmetic algebraically". *Mathematics Teaching*. (Vol. 163, p. 19-29).
- Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). "Investigación y experiencias didácticas el aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica". *Enseñanza de las Ciencias*. (Vol. 7, N° 3, p. 229-240).
- Lewy, H. (1951). *Studies in assyro-babylonian mathematics and metrology, en Orientalia*. [Documento disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1tica_babil%C3%B3nica [05/02/2020].
- Martínez, O. (2014). "Sistema de creencias acerca de la matemática". *Actualidades Investigativas en Educación*. (Vol. 14, No. 3, p. 1-28).
- Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University.

- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.
- Moreno, D. (2013). "Globalización y periferia: margen y centralidad en el pensamiento epistémico latinoamericano". *ENLACE: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento*. (Vol. 1, p. 73–84).
- Real Academia Española. (2019). *Diccionario de la lengua española*. Documento disponible en: <http://dle.rae.es/> [05/07/2019].
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Investigación y Experiencias Didácticas. Enseñanza de las Ciencias*. (Vol. 12, N° 1, p. 45–56).
- Serres, Y. (2010). "Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza". *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*. (Vol. 12, N° 1, p. 122–142).
- Socas, M. (2011). "La enseñanza del álgebra obligatoria. Aportaciones de la investigación". *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. (Vol. 77, p. 5–34).
- Struik, D. (1987). *A concise history of mathematics*. New York, USA: Dover Publications.
- Torres, L., Valoyes, E. y Malagón, R. (2002). "Situaciones de generalización y uso de modelos en la iniciación al álgebra escolar". *Revista EMA*. (Vol. 7, No. 2, p. 227–246).
- Valdivie, C. (2011). "Estudio de los polinomios en contexto". *Revista Paradigma*. (Vol. 32, N° 2, p. 85–106).
- Warren, E. (2003). "The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra". *Mathematics Education Research Journal*. (Vol. 15, N° 2, p. 122–137).
- Zapatera, A. (2018). "Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para educación infantil y primaria". *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. (Vol. 97, p. 51–67).