

## Resumen

Los Errores son la expresión de un proceso de construcción de conocimiento propio de cada individuo en el que interactúan: profesor, estudiante, contexto, currículo, entre otros. La presente disertación está enfocada en socializar la investigación de maestría ya concluida, cuya fin último fue interpretar los errores algebraicos presentes en el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas a nivel del Tercer Año de Educación Media en la Unidad Educativa “Antonio Herrera Toro”. El sustento teórico de la misma fue el constructivismo Piagetano y en la taxonomía establecida por Radatz. El recorrido metodológico se enmarcó en un diseño no experimental de campo; bajo un método etnográfico desde una perspectiva interpretativa. Para efectos de este estudio en primer término, la investigadora se adentró al lugar a fin de conocer y seleccionar los informantes clave. Como técnica se emplearon la observación participante y la entrevista guiada. Una vez obtenida la información se realizó el proceso de triangulación de la información, logrando comprender: si bien en las situaciones con la temática los estudiantes tenían la posibilidad de realizar un análisis retrospectivo de la solución, no se encontró ni un solo caso que llevaran a cabo esta estrategia; sino simplemente se limitaron a la aplicación de una fórmula o a efectuar las transposiciones consideradas pertinentes, sin mediar otro proceso. Los errores detectados resultaron de la aplicación incorrecta, crédula de procedimientos o concepciones inadecuadas de aspectos fundamentales de la Matemática; también el uso inadecuado del álgebra, herramienta fundamental en la resolución de problemas.

**Palabras clave:** errores, aprendizaje de la matemática, taxonomía de Radatz.

## ERRORS IN LEARNING MATHEMATICS FROM RADATZ TAXONOMY

### Abstract

Errors are the expression of a process of knowledge construction of each individual in which teacher, student, context, curriculum interact. The present dissertation focuses on socializing an already completed master's research, whose ultimate goal was to interpret the algebraic errors in learning the Systems of Linear Equations with two Incognitos at third year of secondary education in the Educational Unit “Antonio Herrera Toro “. The theoretical support was Piaget's constructivism and Radatz taxonomy. The methodology was of a non-experimental field design; under an ethnographic method from an interpretative perspective. The techniques used were the participant observation and guided interview. The process of information triangulation was carried out to understand that although in the subject situations where the students had the possibility of performing a retrospective solution analysis, there was not a single case that followed the strategy. On the contrary, they simply limited to the application of one formula or to do the transpositions considered relevant, without any other process. The errors detected resulted from the incorrect, credulous application of procedures or inadequate conceptions of fundamental aspects of mathematics; as well as the misuse of algebra, fundamental tool in problem solutions.

**Key words:** errors, learning mathematics, Radatz taxonomy.

## Introducción

La enseñanza y aprendizaje de la matemática en los diferentes niveles y modalidades es una de las temáticas de investigación más frecuentes abordadas por los estudiosos de la didáctica. Quizás se podría decir, debe a que la enseñanza de esta disciplina está centrada en desarrollar en el educando las nociones o conceptos útiles para comprender su entorno; proporcionando al aprendiz una serie de herramientas para el acceso a otras áreas del conocimiento y actividad humana.

De allí, el aprendizaje en esta área de formación "...es siempre un proceso activo, resultado de una variedad de interacciones del alumno con el maestro, compañeros, familia y sociedad..." (Rico, 2000: 23). Por esta razón, el nuevo aprendizaje construido por el discente debe transformar todo aquel conocimiento previo o estructuras mentales existentes, ya sean generadas de manera informal (experiencia en la vida cotidiana) o adquiridos en un proceso de formación anterior; por ejemplo, en el caso del aprendizaje del álgebra, siendo esta una rama de la Matemática, implica un cambio de pensamiento; vale decir, pasar de tareas numéricas concretas a proposiciones generalizadas sobre los distintos campos numéricos y sus operaciones; representadas de manera formal. La misma debe ser utilizada como herramienta fundamental al momento de abordar actividades matemáticas; para este caso en particular aquellas donde estén presentes un conjunto de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sin embargo, el problema radica en el desarrollo de los procesos de la enseñanza y aprendizaje en este caso de la investigación alusiva a la temática de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, a nivel del tercer año de educación media general; apreciando clases centradas únicamente en el método expositivo, magis-

trales con un contenido descontextualizado, fuera del interés del estudiante; aislado de su realidad y entorno, enfocando la enseñanza en el ámbito de la aritmética, prevaleciendo así las operaciones entre números y la resolución de problemas desde el punto de vista algorítmico, generando una ruptura entre la aritmética y el álgebra, donde esta última debe ser considerada en toda actividad matemática como un instrumento clave para dar una respuesta óptima a una situación planteada. Briceño (2009) afirma:

Los ambientes de aprendizaje son escenarios transformadores donde confluyen la intención de enseñar o formar, o ambas inclusive, permitiéndose la apertura a la diversidad en los paradigmas, teorías del aprendizaje, métodos y estrategias. Igualmente constituyen el punto de partida de un conocimiento en discusión, sin limitaciones restrictivas, donde se da cabida al encauzamiento de la inteligencia en la dirección que el facilitador considere adecuada, permitiendo a su vez, la discusión entre las proposiciones que se consideren verdaderas o erróneas, puesto que todo individuo o actor del aprendizaje tiene capacidad para refutar un error, argumentarlo, liberar la verdad del error y sustituirlo por evidencia verdaderas. (p. 10)

Esto dio pie a la necesidad de trabajar con herramientas algebraicas empleándolas en la resolución de problemas, o para comprender tanto proposiciones como técnicas relacionadas con el lenguaje algebraico o funcional; donde el aprendiz haga uso de su razonamiento lógico, su perspectiva crítica, valorando la veracidad o no de las respuestas y validez de los procedimientos utilizados.

No obstante, en todo proceso de construcción del conocimiento emergen las dificultades y errores; de hecho Briceño (ob. cit.) destaca:

...el error es una debilidad común, elemento que está presente en todos los procesos y acciones del sujeto como ente falible. En el plano socio-cognitivo-educativo, el error es considerado como un equívoco grave que tiende a penalizar-

se, sancionarse; algunos lo califican como un acto disfuncional que no es de provecho en los ambientes de aprendizaje. (p. 10)

Estas tendencias mencionadas anteriormente, son frecuentes en los espacios de aprendizaje conductistas, donde el estudiante es un actor pasivo en el proceso, repetidor de información y métodos. Inclusive, para Abrate, Pochulo, y Vargas (2006) “los errores surgen en la clase por lo general de manera espontánea y son la manifestación de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables; como por ejemplo, profesor, alumno, currículo, contexto sociocultural” (p. 69). Dejando en claro, la solución de problemas no consiste únicamente en hacer, ni en dejar de hacer; sino en que el estudiante logre comprender el mismo participando activamente en su proceso de construcción de conocimiento.

De hecho, al momento de resolver un problema pueden ser observables, como por mencionar un ejemplo, cuando el discente escribe la solución de la tarea más no justifica o relata los procedimientos, acciones realizadas para encontrar la solución; es decir, se da una desaparición progresiva de las justificaciones algebraicas en los procedimientos aritméticos, geométricos o combinatorios y a la escasa utilización de fórmulas reduciéndolas a simples algoritmos de cálculo, como ocurre en los estudiantes del nivel de educación media. Tal es el caso del contenido matemático: Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas, reflejado como tema de estudio en el Tercer Año de Educación Media, dirigido a participantes con edades comprendidas entre trece (13) y dieciséis (16) años, apareciendo posteriormente en el mismo grado para la solución de problemas con sistemas de inecuaciones; además abarca los siguientes años escolares; al iniciar con el es-

tudio del contenido, se encuentran con la situación de obtener una solución única en problemas de este tipo, es necesario dos o más ecuaciones lineales, encontrando así un valor numérico desconocido.

En base a lo anteriormente expuesto, se formula el siguiente cuestionamiento: ¿cómo emergen los Errores Algebraicos en el Aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas en los estudiantes del Tercer Año de la Unidad Educativa: “Antonio Herrera Toro”?

### **Intencionalidades de la investigación**

1. Diagnosticar los Errores Algebraicos presentes en el aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas a nivel del Tercer Año de Educación Media.
2. Analizar los Errores Algebraicos cometidos por los estudiantes en el aprendizaje de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas de acuerdo a la Taxonomía de Radatz.
3. Interpretar los Errores Algebraicos presentes en el aprendizaje de Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas pertenecientes al Tercer Año de la U.E. “Antonio Herrera Toro” de acuerdo a la Taxonomía de Radatz.

### **Binomio Discente-Docente en la construcción del conocimiento**

Partiendo de la premisa *el aprendiz es el constructor de su propio conocimiento*, relacionando los conceptos a aprender con su entorno y le da un sentido; hace entender, el estudiante obtiene el método de crear por si solo el conocimiento obtenido por lo que le rodea a su entorno, es decir, ver, oír, lectura y exploración, por ello nace la experiencia.

A fin de llegar al origen o a las raíces del conocimiento matemático en el individuo, el Psicólogo Suizo Jean

Piaget, (1979) señala "...solo existe, pues, un medio para llegar a las raíces epistemológicas del conocimiento matemático: combinar el análisis lógico, (...) con un análisis genético" (p.16). Es decir, la formación de dicho conocimiento se realiza tomando en consideración el origen y estructura de una proposición, tomando conciencia del nivel epistemológico que ésta tiene.

Es importante destacar, todo conocimiento trae consigo el riesgo de una disonancia cognitiva, desarrollando en el educando las nociones o concepciones falsas, impidiendo llegar a una solución correcta ante cualquier problema o aplicación coherente a una situación de la vida diaria; por esta razón, es importante considerar el error como punto de partida en la construcción del conocimiento científico.

Entre tanto, la sustentación teórica de esta investigación se enmarcó en la Categorización de los Errores establecida en la Taxonomía de Radatz (1980, citado por Rico y Castro, 1995), estas subyacen porque durante el proceso de aprendizaje de la Matemática surgen diversas dificultades al momento de enfrentarse con una situación o problema incidiendo en el rendimiento académico de los estudiantes, así como su actitud ante los mismos. Los Errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que actúan muchas variables: profesor, alumno, contexto, currículo y otros. Rico y Castro (1995) destacan: Radatz ofrece una taxonomía a fin clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis; a efectos de este estudio solo se consideraron tres categorías propuestas por Radatz (1980):

- Errores debidos a dificultades en el lenguaje: se presentan en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pa-

saje del lenguaje corriente al lenguaje matemático; es decir, son errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debidos a la falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: aparecen en la representación espacial de una situación matemática o problema geométrico.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: son los cometidos por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas, y dominio insuficiente de símbolos y conceptos matemáticos.

### **Metodología**

La investigación presentada fue un estudio de maestría ya concluido; sustentado en un diseño no experimental tipo de campo con un enfoque cualitativo desde una perspectiva interpretativa. Donde Martínez (2007) refiere en relación con este enfoque: "... considera los hechos sociales como cosas que ejercen una influencia externa y causal sobre el hombre, sino que valoran también y sobre todo la importancia de la realidad como es vivida y percibida por él: sus ideas sentimientos y emociones". (p. 8)

La comprensión del lenguaje algebraico implica un proceso activo, constructivo y orientado hacia unas habilidades a desarrollar a través de actividades desarrolladas por el aprendiz; estos así como otros aspectos dentro de esta perspectiva, fueron elementos

fundamentales de esta investigación, tal es el caso de los Errores Algebraicos y la clasificación de los mismos atendiendo la taxonomía de Radatz (ob. cit.), hicieron que estudio se adscribiera a una investigación cualitativa, permitiendo observar en forma directa el proceso del estudiante en la construcción del conocimiento matemático, los errores cometidos durante el quehacer educativo y su comportamiento.

Para el logro las intencionalidades de esta investigación, se realizó un trabajo de carácter descriptivo utilizando el proceso metodológico de la investigación etnográfica, la cual según Tamayo (1999)

Constituye la descripción y análisis de un campo social específico y una escena cultural determinada (...). La meta principal del método etnográfico consiste en captar el punto de vista, el sentido, las motivaciones, intenciones y expectativas que los actores otorgan a sus propias acciones sociales, proyectos personales o colectivos, y al entorno sociocultural que lo rodea. (p. 62)

Por ser un estudio etnográfico se deben buscar grupos o comunidades que compartan una misma cultura, el investigador entonces tendrá la opción de seleccionar el lugar, además detectar a los participantes, posteriormente de ese modo recolecte y analice la información. Esto implicó, los informantes seleccionados conforman las interacciones observadas durante el estudio fueron los estudiantes del tercer año, sección "F" de la Unidad Educativa "Antonio Herrera Toro"; vistos como informantes claves imprescindibles en el estudio por la valiosa información aportada por cada uno de ellos y a la cual no se tiene acceso sino a través de la propia persona, en ese caso en particular, se trata de los Errores Algebraicos cometidos durante el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, en este estudio se consideraron informantes claves a los discentes del tercer

año, sección "F", en la disciplina Matemática, cuya matrícula inicial por fue de veintitrés (23) estudiantes. Seguidamente, se emplearon una serie de técnicas de recolección de información orientadas de manera esencial a alcanzar los fines propuestos, estas son: la observación directa, donde se usó el audio o grabación y cuaderno de notación permitiendo recabar información del discurso empleado durante el proceso de aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

La segunda técnica empleada fue la entrevista guiada, la cual estuvo estructurada con preguntas agrupadas para su presentación de acuerdo a su contenido y nivel de motivación, considerando la formulación de éstas a través de un lenguaje sencillo, ameno, claro, acorde con la edad e interés del informante, manteniendo una secuencia lógica de los temas indagados; a través de la aplicación de estas técnicas se pudo diagnosticar los Errores Algebraicos presentes en el Aprendizaje de Sistemas de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas a nivel del tercer año.

Asimismo, se analizaron las producciones escritas de los estudiantes (actividad formativa), dando origen a las categorías que permitieron tener una visión holística de los hechos. Para este caso, el tipo de triangulación utilizado en este estudio fue la de datos señalada por Denzin (1978, citado por Finol y Camacho, 2006):

...se da cuando se recurre a datos diferenciados por haber sido recogido y analizados en diferentes tiempos, espacios y por diferenciación de múltiples investigadores y no solo uno. La triangulación de teorías que se da cuando se recurre al uso de varias perspectivas con paradigmas teóricos. La triangulación de técnicas que se da cuando se recurre al contraste de éstas dentro del mismo método o con la comparación de varios de estos. (p. 112)

## Resultados y discusión

A continuación se presenta un cuadro donde se evidencian las categorías considerando los tres tipos de errores a trabajar en esta investigación según la Taxonomía de Radatz (ob. cit.); los considerados en esta investigación etnográfica fueron: aquellos debidos a dificultades en el lenguaje, los debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento y errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

ASPECTO (Según Radatz)	CATEGORÍA	INTERPRETACIÓN
<i>Lenguaje algebraico</i>	Traducción del lenguaje cotidiano al algebraico	Los estudiantes utilizan términos errados para referirse a una variable o acción algebraica, como por ejemplo vichando, metemos los términos, pasamos pa' el otro lado.
<i>Asociaciones incorrectas</i>	Reconocimiento de los métodos a aplicar	Al abordar el ejercicio, los estudiantes no indican qué método se va a utilizar si es de reducción, sustitución, igualación.
	Términos semejantes	Los estudiantes proceden a adicionar términos no semejantes como por ejemplo $2X+4=6X$
<i>Hechos, destrezas y conceptos previos</i>	Transposición de Términos	Al transponer un término al otro miembro no aplican la propiedad del opuesto para la adición en R. $2X+Y=4$ entonces $Y=4+2X$
	Intervalos de representación en el sistema de coordenadas	Al representar gráficamente las rectas en el plano cartesiano, se evidenció en algunos estudiantes que no tomaban las mismas distancias entre cada división de los ejes coordenados.

**Diseño:** autora, 2018

Partiendo del tiempo en el cual el etnógrafo estuvo presente en el lugar donde ocurrían los hechos más relevantes a estudiar, en este caso errores presentes en el aprendizaje de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, estudiadas a través de cuatro procedimientos: Igualación, Sustitución, Reducción y el Método Gráfico; sin embargo, el método más utilizado por los estudiantes fue el de sustitución a pesar de no identificar al momento de abordar el problema.

De allí, la fuente de información de esta indagación fueron la cantidad de estudiantes en promedio antes mencionada, se observó además el proceso de aprendizaje de los mismos dentro del aula de clases, se analizaron la actividad formativa aplicada por la docente y se les realizó una entrevista. Una vez analizada la información de forma individual, se procedió a establecer una categorización de las evidencias más resaltantes que se repetían continuamente en los informantes, a la luz de la Taxonomía de los Errores establecida por el investigador Radatz y así establecer una validez interna de los mismos obtenidos a través de la técnica de la *triangulación de los datos* cuya fuente son personas (estudiantes) que hacen vida en el aula de clases.

Observando entonces, en forma continua debilidades en cuanto al dominio del *lenguaje algebraico*; allí los estudiantes no utilizaban términos matemáticos apropiados durante la participación en las clases. Lo antes expuesto

permite apreciar las dificultades al efectuar el pasaje del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático; es decir, son errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debidos a la falta de comprensión semántica del lenguaje matemático.

Asimismo, se apreciaron errores en cuanto al aprendizaje deficiente de *hechos, destrezas y conceptos previos* los cuales son los cometidos por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea Matemática, procediendo a adicionar términos no semejantes. Aunado a esto se evidenció en los informantes que al momento de abordar un problema de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, lo hacen sin saber la técnica utilizada (método de sustitución, reducción o igualación); de hecho, la técnica más utilizada fue la de sustitución, no abordaron problemas a través de la reducción ni por el método gráfico; siendo este último una herramienta para comprender mejor el concepto de solución de un sistema.

Y por último pero no menos importante, durante el proceso de investigación se encontraron errores: la transposición de un término al otro miembro sin aplicar la propiedad del elemento opuesto en la adición en  $\mathbb{R}$  y la dificultad existente en los discentes para representar gráficamente el resultado del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual es el punto de intersección entre las dos rectas expresadas a través de un sistema de ecuaciones.

### Conclusiones

Finalmente se llegó a la instancia de cierre de la investigación, si bien en las situaciones relacionadas con sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas los estudiantes tenían la posibilidad de realizar un análisis retrospectivo de la solución, no se encontró ni un solo

caso que llevaran a cabo esta estrategia; sino simplemente, se limitaron a la aplicación de una fórmula o a efectuar las transposiciones consideradas pertinentes, sin mediar otro proceso. Esto marca de por sí, un fenómeno clásico interesante, la mirada retrospectiva permite soslayar muchos de los errores presentes en la resolución de problemas.

Asimismo, los errores detectados en las producciones de los discentes resultaron de la aplicación incorrecta, crédula de procedimientos o concepciones inadecuadas de aspectos fundamentales de la Matemática; también el uso inadecuado del álgebra, herramienta fundamental en la resolución de problemas. Por esta razón se proponen los siguientes procedimientos heurísticos que pueden ayudar a reducir la presencia del Error:

- Es necesario que el discente reconozca lo solicitado a fin de hallar en el enunciado e incorporar una variable a ser representar la cantidad desconocida. Por tanto, éste se debe apoyar en el reconocimiento de las palabras claves: cómo, qué, cuántos, encontrar, entre otros.
- Buscar relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas, como claves lingüísticas de posibles igualdades con operaciones matemáticas las cuales se deban aplicar.
- Realizar los procedimientos paso a paso, evitando omitir operaciones o procedimientos claves para realizar posteriormente la retrospectión.
- Evitar utilizar técnicas no están previstas en el método seleccionado, éstas podrían ser distractores e inclusive causa de la aparición del error.
- Traducir la solución encontrada al lenguaje original del problema; es decir, interpretar la solución encontrada para así responder a la interrogante planteada en el sistema.

- 
- Representar gráficamente ambas ecuaciones y así verificar si la solución encontrada corresponde con la intersección de las mismas; ya que la representación gráfica contribuye significativamente a la comprensión de la solución encontrada.

### Referencias

Abrate, R., Pochulo, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática*. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Briceño, M. (2009). *El uso del error en los ambientes de aprendizaje: una visión transdisciplinaria*. Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales, 14(1), 9-28.

Finol, M. y Camacho, H. (2006). *El Proceso de Investigación Científica*. Maracaibo: EDILUZ

Martínez, M. (2007) *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación*. Manual Teórico-Práctico. México: Trillas.

Piaget, J. (1979). *Tratado de lógica y conocimiento científico*. III Epistemología de la Matemática. Vol. 3. Buenos Aires: PAIDÓS.

Rico, L y Castro, E. (1995) *Errores y Dificultades en el Desarrollo del Pensamiento numérico*. Disponible: <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL94-148.PDF> [Consultado: 2008, Diciembre 15].

Rico, L. (2000). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para la educación secundaria*. En Rico, L. (Coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Tamayo, M. (1999). *El Proceso de la Investigación Científica*. 3<sup>ra</sup> Edición. México: Limusa, S.A. de C.V.