

YARITZA PÉREZ

Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
yaritza_perez@hotmail.com

Recibido: 04/11/2017

Aprobado: 18/02/2018

Resumen

El presente estudio histórico-epistemológico está orientado a la comprensión de la evolución de algunos problemas, propiedades y conceptos comprendidos en las cónicas. El problema abordado está inmerso en un proyecto de investigación macro sobre “Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica” (Pérez, 2009). Este análisis permitirá de alguna manera encontrar mediante la historia, dificultades y errores en el desarrollo de los conceptos matemáticos relacionados con el tema. Para esto se realizó un estudio documental a través de la revisión y lectura de diversas fuentes impresas como electrónicas. El mismo permitió establecer las configuraciones epistémicas que dieron origen al objeto matemático. No obstante, para el abordar el análisis más detallado de la actividad matemática fue necesario introducir los seis tipos de entidades primarias; situaciones, lenguaje, conceptos, propiedades, acciones y argumentos (Font, V y Godino, J. 2006). El esquema metodológico a seguir se fundamenta en el paradigma cualitativo. Las conclusiones obtenidas dejan ver que el uso del lenguaje geométrico prevaleció por mucho tiempo en el estudio de las cónicas aunque algunos matemáticos utilizaban el lenguaje simbólico para el análisis de ciertas cuestiones. Las situaciones problemas se presentaban mediante necesidades geométricas, aritméticas, astronómicas y abstractas como el caso de la resolución de uno de los tres problemas clásicos, los movimientos planetarios, entre otros.

Palabras clave: secciones cónicas, configuración epistémica, estudio histórico-epistemológico.

HISTORICAL - EPISTEMOLOGICAL - EDUCATIONAL ANALYSIS ABOUT THE CONICAL SECTIONS

Abstract

This study aimed to understand the evolution of some problems, properties and concepts involved in the conic. The problem is immersed in a macro research project on “Analysis of a study process on the ellipse using the criteria of educational suitability” (Pérez, 2009). This analysis will allow finding through history, difficulties and mistakes in the development of mathematical concepts related to the topic. This documentary study based on reviewing and reading various printed and electronic sources, establishing the epistemic configurations resulting in the mathematical object. However, to address in a more detailed analysis of mathematical activity it was necessary to introduce the six types of primary entities: situations, language, concepts, properties, actions and arguments (Font and Godino, 2006). The methodological approach based on the qualitative paradigm. The conclusions reveal that the use of geometric language prevailed for a long time in the study of conic although some mathematicians used symbolic language for the analysis of certain issues. The problems were presented by geometrical, arithmetic, astronomy and abstract needs, as the case of the resolution of one of the three classic problems, planetary movements, among others.

Key words: conic sections, epistemic configuration, historical-epistemological study.

Introducción

Uno de los contenidos que se abordan en el quinto año de media general son las secciones cónicas, contenido primordial en la formación de bachilleres, por ende, se considera de utilidad establecer ciertos dispositivos de tipo didácticos para su enseñanza. Con ello se procura hacer una revisión de los significados según los contextos institucionales que se han precisado de este objeto matemático a lo largo del tiempo. Este análisis permitirá de alguna manera encontrar a través de la historia definiciones, propiedades y representaciones gráficas asociadas al lugar geométrico desde la prehistoria hasta nuestros días, para llegar a implicaciones que conllevaron su evolución.

El análisis realizado en torno del desarrollo histórico y epistemológico de estas curvas se basa en los fundamentos teóricos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino 2003). En el cual se procura dar a conocer el inicio del objeto matemático y sus diversos significados en el transcurso del tiempo. Para esto se introduce la noción de configuración epistémica donde se articulan los siguientes objetos: lenguaje, situaciones-problema, conceptos, proposiciones (procedimientos, técnicas, propiedades, teoremas) y argumentaciones. (Font, V. y Godino, J. 2006). En este sentido, Godino (2003), considera estos tipos como “*entidades primarias*”, las cuales se pueden a su vez agrupar en entidades secundarias como: praxis, logos, praxeologías, conceptos-sistema, campos conceptuales, teoría de grupos, aritmética, geometría, etc.

El análisis histórico - epistemológico que presenta EOS, permite la reflexión sobre la naturaleza de un objeto matemático a lo largo del tiempo. De hecho, Martínez (2008), señala que:

Es de interés el análisis de la historia de las matemáticas, interpretada desde un punto de vista epistemológico, pues permite recabar información sobre los sistemas prácticos utilizados para solucionar situaciones – problemas, en relación a marcos institucionales específicos, interés que no solo abarca los problemas, sino también las técnicas, los lenguajes, las notaciones, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, puestas en juegos en cada momento y circunstancia. (p. 37)

La misma autora menciona que el “estudio de las configuraciones epistémicas y de las entidades primarias, se puede concretar el significado de un objeto o noción matemática estudiada y tomar decisiones de tipo instructivo o curricular eficaces para la selección de los sistemas de prácticas matemáticas que mejor se adapten a un proyecto educativo” (p. 37).

Para esto se ha realizado un estudio documental, mediante la revisión y lectura de diversas fuentes como: libros, revistas, artículos, tesis doctorales, trabajos de grados, temas relacionados con el contenido abordado, para establecer y profundizar sobre su origen, desarrollo y papel en la historia. Se consideró una subdivisión histórica destacando algunos personajes que contribuyeron en la evolución de las cónicas a lo largo del tiempo, a modo de revisar elementos que puedan servir de herramienta didáctica en el proceso enseñanza aprendizaje de este tópico.

A continuación se detallan los aportes de distintos matemáticos que estuvieron presentes en el desarrollo histórico de las secciones cónicas:

Desarrollo histórico sobre las secciones cónicas

El descubrimiento de las Secciones Cónicas se dio mediante la preocupación de orden práctico de algunos matemáticos para solucionar uno de los tres problemas clásicos de la antigua matemática griega, los cuales debían hacerse a través de intersecciones de rectas y

circunferencias, utilizando solamente la regla sin marcas y el compás. En este periodo la geometría emergió como una disciplina de estudio. Así lo menciona Del Río (1996):

La concepción de la geometría deja de ser absolutamente pragmática, como en las culturas precedentes, tendiendo a constituirse lentamente como una ciencia basada en el razonamiento deductivo y se construye un álgebra geométrica que regula las operaciones con segmentos, áreas y volúmenes, mediante el uso de la regla y el compás. (p. 12)

En apoyo a la imposibilidad de resolver los problemas con las condiciones dadas en la antigüedad Perero (1994), explica los tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Este último problema generó en distintos matemáticos de la época la preocupación por encontrar la solución y de este exhaustivo trabajo se dio los primeros pasos para el origen de algunos lugares geométricos, entre ellos, las secciones cónicas.

Menecmo: nació (siglo IV a.C.), discípulo de Platón, astrónomo y geómetra. Escribió obras de geometría referentes al significado de la palabra elemento y las diferencias entre los teoremas y problemas. Según Collette (2006), señala: “La contribución más importante de Menecmo fue el descubrimiento de las Secciones Cónicas, lo que permitió resolver el problema del Oráculo de Delos” (p. 99).

En este sentido, Del Río (1996), afirma que, Menecmo descubrió que “las secciones planas de un cono servían para resolver la duplicación del cubo” (p.13).

En los estudios realizados por Menecmo se evidencia que por la necesidad de resolver uno de los tres problemas clásicos en este caso “la duplicación del cubo”, dio origen a las nociones de las curvas como las secciones cónicas, dando respuestas a problemas de tipos geomé-

tricos. Las situaciones problemáticas se presentaban mediante aspectos geométricos. El origen de las secciones cónicas por Menecmo está relacionado con las intersecciones de las generatrices de un cono circular recto con un plano que no pase por el vértice del cono (Triadas de Menecmo). Entre los conceptos utilizados por este matemático encontramos que para ese tiempo tenían la noción de proporcionalidad, perpendicularidad, recta, cono circular, ángulos y sus tipos, plano intersección, traslación y rotación de figura, entre otros. Por otro lado, los procedimientos utilizados por este matemático se encuentran construcciones geométricas y la utilización del teorema de la altura. Mientras que sus argumentos venían dados por deducciones de tipo geométrico. El lenguaje utilizado era verbal geométrico y gráfico. (Ver cuadro 1)

Cuadro 1. Configuración epistémica impulsada por Menecmo (Siglo IV a.C)

ENTIDADES PRIMARIAS	
Lenguaje	Verbal: aritmético, geométrico, gráfico
Situaciones problemas	Necesidades geométricas: resolución del problema de la duplicación del cubo.
Conceptos	Proporcionalidad, perpendicularidad, recta, cono circular, ángulos y sus tipos, plano, intersección, traslación, rotación de figuras, media geométrica, entre otros.
Proposiciones	Cálculo de la media geométrica de dos números.
Procedimientos	Construcciones geométricas (la cuadratura de un rectángulo)
Argumentos	Razonamiento deductivo y la geometría como justificación

En los aportes del matemático *Apolonio de Perga*, se visualiza que las situaciones problemáticas eran de tipo geométrico, realizó estudios de las secciones cónicas mediante la superposición de dos conos y en algunos casos generando un solo cono.

Entre los conceptos matemáticos que manejaba se encuentran: congruencias, semejanzas, curvas, cono circular, diámetros conjugados, plano, círculo, punto, recta, cono oblicuo y cono escaleno, entre otros; se puede evidenciar, al igual que Menecmo, los procedimientos utilizados por este matemático se destacaron las construcciones geométricas. El lenguaje abordado fue el geométrico, retórico y sincopado, Malisani (1999) nos refiere “la fase sincopada desde Diofanto hasta fines del siglo XVI, en la cual introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan en el lenguaje natural” (p. 4). Entre las proposiciones se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a una elipse se debe verificar que $PQ^2 = k.AQ.QA$. Por otro lado, las propiedades encontradas por Apolonio, Boyer (1986) “Dos cónicas son semejantes, si las ordenadas trazadas al eje a distancia proporcionales del vértice son respectivamente proporcionales a las correspondientes a las abscisas” (p. 199). De los argumentos se apoyaba en el método deductivo y en lo geométrico. (Ver cuadro 2)

Cuadro 2. Configuración epistémica impulsada por Apolonio de Perga (262 a. C.)

ENTIDADES PRIMARIAS	
Lenguaje	Geométrico, sincopado y retórico
Situaciones problemas	Aspectos geométricos
Conceptos	Congruencias, semejanzas, curvas, cono circular, diámetros conjugados, plano, círculo, punto, recta, cono oblicuo y cono escaleno.
Proposiciones	Condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a una elipse. Secciones de un cono.
Procedimientos	Construcciones geométricas
Argumentos	Razonamiento deductivo. La geometría como justificación.

En el recorrido por la historia a lo largo del objeto matemático, se presenta a *Johann Kepler*, se evidencia que las situaciones problemáticas estudiadas por este matemático vienen dadas por aspectos físicos, astronómicos y geométricos, descubrió las leyes que rigen los planetas en una de las cuales menciona: cada planeta describe una elipse y uno de sus focos está ocupado por el sol. El lenguaje utilizado era el sincopado. Se tenía conocimiento de conceptos tales como recta, movimiento, área de figura, continuidad, circunferencia, infinito, ecuación y secciones cónicas, a Kepler se le debe la palabra foco que se utiliza hoy en día. Entre las proposiciones se hallan que la elipse se puede obtener a partir de una circunferencia de radio α por medio de una transformación bajo la cual la ordenada de cada punto resulta acortada según una razón dada $\frac{b}{a}$. Entre los procedimientos se destacaron las construcciones geométricas, empleando como argumentación las leyes de la física, lo geométrico y lo deductivo. (Ver cuadro 3)

Cuadro 3. Configuración epistémica impulsada por Kepler (1571).

ENTIDADES PRIMARIAS	
Lenguaje	Sincopado
Situaciones problemas	Necesidades físicas, astronómicas y geométricas tales como cálculo de volúmenes de diversos sólidos de revolución.
Conceptos	Recta, movimiento, área de figuras, continuidad, circunferencia, infinito, ecuación, y secciones cónicas, foco, continuidad, entre otros.
Proposiciones	Movimientos de los planetas, determinar el tipo de cónicas de acuerdo a sus elementos, caracterización de una curva a partir de una propiedad de sus tangentes.
Procedimientos	Construcciones geométricas. Leyes de física.
Argumentos	Razonamiento deductivo. La geometría como justificación.

En *Descartes*, se usó un lenguaje algebraico y geométrico; las situaciones problemas planteadas son más abstractas y geométricas, se interesó por la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas. Los conceptos son más diversos sistemas de coordenadas, ecuaciones, gráficas, figuras geométricas, longitud, parábola, elipse, circunferencia, hipérbola, entre otros. En las proposiciones logró obtener la algebrización de las secciones cónicas mediante el estudio de argumentos geométricos. Descartes, a través de los razonamientos geométricos y el uso de notaciones apropiadas, llega a ecuaciones, la cual representa lugares geométricos como la elipse, la parábola, la hipérbola, entre otros. Sus argumentos se basan en la geometría para dar justificación a su método inductivo. (Ver cuadro 4)

Cuadro 4. Configuración epistémica impulsada por Descartes (1596-1650)

ENTIDADES PRIMARIAS	
Lenguaje	Simbólico-Geométrico
Situaciones problemas	Abstractas, geométricas tales como resolución de uno de los tres problemas clásicos, el problema de Pappus, resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas.
Conceptos	Sistema de coordenadas, ecuaciones, gráficas, figuras geométricas, longitud, parábola, elipse, circunferencia, hipérbola, entre otros.
Proposiciones	Algebrización de las secciones cónicas
Procedimientos	Aplicaciones de fórmulas, construcciones geométricas con regla y compás, desarrolló el sistema de coordenadas cartesianas, resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas.
Argumentos	La geometría como forma de justificación y el método inductivo.

De acuerdo con los razonamientos que se han venido realizando, el uso del lenguaje geométrico prevaleció por mucho tiempo en el estudio de las cónicas aunque

algunos matemáticos utilizaban el lenguaje simbólico para el análisis de ciertas cuestiones. Las situaciones problemas se presentaban mediante necesidades geométricas, aritméticas, astronómicas y abstractas como el caso de la resolución de uno de los tres problemas clásicos, los movimientos planetarios, el problema de Pappus, entre otros. Sin embargo, se abordaban más argumentos de tipo geométrico para llegar al objeto matemático. Entre los conceptos empleados por los personajes prevalecían aspectos del área de geometría tales como: media geométrica, recta, cono, intersecciones, puntos medios, ejes, rectas, perpendicularidad, mediatriz, etc. A partir de investigaciones realizadas por los Pitagóricos, Apolonio llegó a obtener resultados generales sobre las cónicas utilizando no solo cono circular recto, sino también el cono oblicuo o el cono circular escaleno y la superposición de dos conos. Por otro lado, Kepler utilizó las cónicas (elipse) en el estudio astronómico, y esta viene representada como la órbita del planeta. Por último, Descartes se interesó por la resolución geométrica de las ecuaciones algebraicas, para llegar a las ecuaciones de las cónicas. Los procedimientos y argumentos se vieron muy influenciados por los aspectos geométricos y algebraicos.

En el uso de las proposiciones se notó a través de la solución de diversos problemas tales como: los tres problemas clásicos, en especial la duplicación del cubo, la sección de conos ya sean circulares, rectos entre otros, incluso provenientes de la vida cotidiana como el caso del modelo astronómico introducido por Kepler, no se evidencian criterios fijos para abordar estas cuestiones; no obstante, se observa que a partir de propiedades se llega a la algebrización de las curvas.

Consideraciones finales

En este apartado se presentan una serie de posibles implicaciones didácticas que proceden del análisis his-

tórico epistemológico realizado sobre la evolución de conceptos y problemas abordados por distintos matemáticos a lo largo del tiempo sobre cónicas. Cabe mencionar, que este objeto matemático se va construyendo mediante la resolución de cuestiones que tienen origen diverso, en este sentido Del Rio (1996), nos señala, el inicio de estos problemas pueden ser:

Satisfacer o mejorar una necesidad, técnica o práctica.

Buscar la explicación de un fenómeno físico o social, como la trayectoria de los planetas que llevo Kepler a encontrar una presencia de la elipse en la naturaleza.

Responder a una inquietud cultural o lúdica, como el problema de Delos cuya resolución condujo a Menecmo al descubrimiento de las Secciones Cónicas.

Mejorar conceptos o procedimientos que ya pertenecen al dominio de la propia matemática, como el cálculo de áreas y longitudes. (p. 52)

El estudio de estas cuestiones conlleva a los matemáticos, físicos y filósofos de esas épocas a dar respuestas conducentes a nuevos términos y procedimientos matemáticos. Por ejemplo, la resolución dada por Menecmo a uno de los problemas cuya condición era el uso solamente de la regla y compas, condujo al descubrimiento de lugares geométricos (secciones cónicas). La evolución del concepto de las secciones cónicas ha tenido una serie de nociones, al principio se dio mediante secciones de un cono, luego se concibió como un lugar geométrico caracterizados por las propiedades focales o foco directriz y, por último, como una ecuación algebraica de segundo grado. En este sentido, se amplía el concepto de lugar geométrico hasta llegar a la algebrización.

A lo largo de este recorrido por la historia de las secciones cónicas se llega a un personaje que buscando la explicación de fenómenos físicos, como por ejemplo la trayectoria de los planetas, encontró en la naturale-

za la presencia de lugares geométricos como la elipse, este físico lleva por nombre Johan Kepler. Esto nos lleva, a propiciar en el aula de clase problemas que estén relacionados con la vida cotidiana del participante y que le puedan encontrar sentido, significado, para que se genere en ellos una cierta inquietud por el deseo de saber y puedan iniciarse en el proceso enseñanza aprendizaje. Es importante mencionar, que en este proceso no solo interviene el docente y el estudiante, así lo menciona Gvirtz y Palamidessi (2000), “la situación de enseñar y de aprender no puede describirse satisfactoriamente por una diada (docente/alumno) ni por un triángulo (docente-alumno / saber), sino que supone la interacción de un aprendiz, de un docente, de contenidos culturales y de problemas en un contexto determinado” (p. 52). Cada uno de estos factores deben estar presentes para que constaten la enseñanza.

Los métodos de enseñanza deben permitir el uso de razonamiento mediante la exploración, tanteo, análisis de casos y formular conjeturas como los utilizados por estos personajes donde predomino el razonamiento geométrico. Del Rio (1996), menciona: “el trabajo práctico manipulativo con modelos materiales y otros recursos pueden ser una actividad instructiva muy importante para promover este tipo de razonamiento geométrico” (p.51). Sin embargo, es primordial venir de una etapa sistematización y formalización como señala el mismo autor hasta llegar al razonamiento deductivo.

La Geometría Analítica se aborda y se enseña actualmente, según González (2007), de la siguiente manera:

- ✓ La introducción de las coordenadas.
- ✓ La aplicación del método de Análisis.
- ✓ El trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas.

- ✓ La aplicación del Álgebra simbólica a los problemas geométricos.
- ✓ La derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones.
- ✓ El estudio de las propiedades de las curvas dadas por sus ecuaciones sobre todo de las derivadas de ecuaciones lineales y cuadráticas.
- ✓ La representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional.
- ✓ La derivación de fórmulas fundamentales para resolver problemas sobre puntos notables, rectas, planos, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, distancias, áreas, etc.
- ✓ La clasificación general de curvas y superficies de segundo orden. (p. 233).

Cada uno de estos puntos tratados desde la antigüedad por los griegos y los distintos matemáticos que dieron sus aportes en el desarrollo histórico de las secciones cónicas.

En el análisis relacionado mediante las configuraciones epistémicas se ha evidenciado que en la matemática a lo largo del tiempo se ha utilizado la resolución de problemas, construcciones geométricas, modelos, aplicaciones de la matemática al mundo real, análisis y síntesis para evaluar conjeturas, análisis de posibilidades, generalización de conceptos.

A raíz de este análisis, se puede tener una visión más general del lenguaje, las situaciones problemas, conceptos, proposiciones, argumentos y procedimientos que han estado conectados para dar origen a este objeto matemático.

En este estudio se ha evidenciado como las cónicas han tenido tanto un tratamiento geométrico como algebraico a lo largo de la historia. Quizás, a la hora de abordar

el contenido de esta cónica en el aula, mediante el análisis geométrico, se logre un mejor entendimiento de la curva y no se convierta en un tema repetitivo para el estudiante sino que él pueda explorar, indagar e identificar los elementos y propiedades de la cónica.

Por último, estas conclusiones solo son un pequeño aporte a la enseñanza de las secciones cónicas en la educación media general, donde se pueden constatar estrategias metodológicas de acuerdo a las características del grupo y su entorno. Lo importante de este recorrido por la historia de estos objetos matemáticos es que se puede visualizar la evolución del objeto matemático y sus aplicaciones en otras ciencias como en la vida cotidiana.

Referencias

- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universitaria.
- Collette, (2006). *Historia de las matemáticas I*. Siglo Veintiuno, editores México.
- Del Río, (1996). *Lugares geométricos cónicas*. Editorial Síntesis, S.A. España.
- Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educación Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 67-98, 2006.
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- González, (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Revista Sigma* 30, 205-235.
- Gvartz y Palamidessis. (2000). *El aprendizaje*. Editorial Larousse. México.
- Malasani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, visión histórica. *Revista IRICE*, 13, 105-132.
- Martínez, A. (2008). *Significados personales de la ecuación de segundo grado en la formación inicial de profesores de matemática*. Proyecto presentado como requisito para optar al grado de magíster en educación mención enseñanza de la matemática. UPEL-Maracay.
- Pérez, Y. (2009). *Análisis de un proceso de estudio sobre la elipse mediante los criterios de idoneidad didáctica*. Trabajo de grado de maestría no publicado. Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay.
- Perero, M. (1994). *Historia e historias matemáticas*. Editorial Iberoamericana. México.