Revista ARJÉ
Vol. 16. N° 30. Edición Enero-Junio 2022
ISSN Versión impresa 1856-9153
ISSN Versión digital 2443-4442

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. UNA VISIÓN DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

MATHEMATICAL MODELING AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. A VISION FROM REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION

Franzyuri Fernando Hernández Fajardo
franzyurihernandez@gmail.com
ORCID 0000-0002-2748-8005
Departamento de Informática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela
Esteban Marino Flores Revette
marinorevette@gmail.com
ORCID 0000-0002-1807-9496
Departamento de Matemáticas. Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela

Recibido: 28/01/2022 - Aprobado: 06/04/2022

Resumen

El objetivo de este ensayo es presentar cómo, dentro del enfoque holandés de la Educación Matemática, llamado Educación Matemática Realista, se utilizan modelos para promover el avance de los estudiantes universitarios en la comprensión de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, dando a entender que, el desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantiza la comprensión de los conceptos básicos de éstas. En este sentido, se plantea la necesidad de mostrarle al estudiante como relacionar las ecuaciones diferenciales con fenómenos físicos de la vida diaria, mediante un Modelo Matemático, con la intención de obtener una mejor comprensión mediante abstracciones sobre el uso de la matemática en la vida cotidiana. Finalmente, los autores muestran sus reflexiones.

Palabras clave: Modelación matemática, educación matemática realista, ecuaciones diferenciales ordinarias.

Abstract

The objective of this essay is to present how, within the Dutch approach to Mathematics Education, called Realistic Mathematical Education, models are used to promote the advancement of university students in the understanding of Ordinary Differential Equations, implying that, developing algebraic and algorithmic skills alone does not guarantee understanding of their basic concepts. In this sense, the need arises to show the student how to relate the differential equations with physical phenomena of daily life, through a Mathematical Model, with the intention of obtaining a better understanding through abstractions about the use of mathematics in everyday life. Finally, the authors show their reflections.

Keywords: Mathematical modeling, realistic mathematics education, ordinary differential equations.

Introducción

El siglo XX, donde recién concluyó y revolucionó toda la vida económica, política, social, científica, técnica, cultural, etc. de la humanidad; por tanto, comenzó el nuevo siglo con un reto: ponerse a la altura de los adelantos científico-técnicos y poder asimilar, utilizar y hacer aportes a las nuevas tecnologías que hoy se imponen. En este sentido, la educación debe jugar un papel fundamental; sin embargo, la educación superior ha tenido cierta lentitud para aceptar los resultados de las ciencias, sobre todo de las ciencias pedagógicas y ha sido todavía más lenta en sus aportaciones para la rápida asimilación de las nuevas tecnologías. De ahí, resulta muy ilustrativa la reflexión: *"Algunas veces los maestros del siglo XX enseñamos contenidos del siglo XIX, a alumnos que tendrán que sobrevivir en el siglo XXI"* (Monereo, 2000, p. s/n).

En ese sentido, es necesario desarrollar habilidades y capacidades matemáticas en los procesos de enseñanza y aprendizaje para contribuir a la comprensión y el avance de las ciencias aplicadas. Siguiendo la misma idea, sin el desarrollo de las ciencias básicas no sería posible el avance de las ciencias aplicadas. Además, estas disciplinas elementales resultan decisivas para llevar adelante al país y ellas desempeñan una función indispensable en la generación de las nuevas tecnologías.

En ese orden de ideas, la modelización matemática es entendida como el proceso de construcción de un modelo matemático útil para estudiar o explicar un fenómeno físico determinado, la cual ha venido tomando fuerza como una estrategia de enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos y sobre todo en las ciencias aplicadas (Alsina, García, Gómez y Romero, 2007; Bloom, Galbraith, Henn y Niss, 2007; Bolea, Bosch y Gascón, 2004; Ortiz, Rico y Castro, 2008).

Al mismo tiempo, el objetivo de enseñar a modelar fenómenos físicos a los estudiantes es lograr en ellos la utilización de la modelización como un medio para aplicar la matemática conocida y luego, cultivarse con la matemática necesaria para modelar nuevos fenómenos físicos.

Es en este enfoque, donde los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando, aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria, los cuales tengan sentido para ellos, estas son situaciones realistas, donde “*el término «realista» se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la «realidad» o autenticidad de los mismos*” (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10).

Modelación Matemática, ¿qué es?, ¿cuál es su naturaleza? y ¿cómo se desarrolla?

Una comprensión teórica coherente del proceso de modelización y del proceso de aprendizaje relacionado con este, ha sido desarrollada durante los últimos 20 años; la cual, ha sucedido a través de una estrecha interrelación entre el desarrollo curricular, prácticas de enseñanza y reflexiones teóricas. De hecho, ahora se dispone de una teoría, tomada como un sistema de puntos de vista interconectados, que puede ser usada para colocar a la modelización como un elemento importante de la enseñanza general de la matemática como así también para analizar, prever y comprender mejor las dificultades del aprendizaje relativas a la modelización (Blum y otros, 2003).

Cabe decir, la enseñanza de la Matemática se realiza muchas veces mediante ejercicios y problemas contribuyendo solo al desarrollo intelectual. Pero, desde el punto de vista de los autores de este escrito esta posición mencionada anteriormente es un error, porque una de las funciones principales de la Matemática es la de servir de lenguaje de la ciencia ya que los problemas de la realidad se traducen al lenguaje matemático (se modelan matemáticamente), se resuelven matemáticamente y, después, esta solución se expresa en palabras del mundo real.

Por otra parte, las necesidades de la ciencia han sido las impulsoras principales del desarrollo de las más variadas teorías matemáticas, en esta dirección Adler (1968) plantea: "*el divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una concha vacía de símbolos sin significados*" (p. s/n).

En relación a la problemática expuesta, es conocida entre los educadores de matemática la frase formulada por algunos estudiantes en una clase «*profesor y para qué sirve esto*», por lo que la poca motivación de cierto número de dicentes para el aprendizaje de la Matemática tiene una relación directa con las dificultades de sus catedráticos para explicar por qué y para qué se enseña uno u otro tema, y en virtud de ello, para presentar problemas prácticos sencillos que justifiquen su utilidad, desde la enseñanza primaria y secundaria, en ese sentido, Bassanezi y Biembengut (1997) plantean que la enseñanza deber estar regida por los intereses y necesidades prácticas de la comunidad sin abusar de ello.

Debe señalarse lo siguiente, algunos autores cuando se refieren a la modelización matemática lo hacen como el proceso para utilizar conceptos y técnicas, esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales; en cambio, son raros los casos donde se emplea tal proceso para el propio estudio de las Matemáticas.

En tal sentido, Villa (2007) establece una diferencia entre «*modelización matemática*» y «*modelación matemática*», la primera caracterizada como propia de la investigación en aplicaciones matemáticas a otras ciencias y la segunda referida a la investigación sobre su aplicación en la enseñanza.

En otras palabras, según Biembengut y Hein (2004) la modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención del modelo matemático de un fenómeno físico o situación problema, el cual es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión; dicho modelo permite no solo obtener una solución particular, sino, además, sirve de soporte para otras aplicaciones o teorías; ya que, un aspecto de la actividad científica, en particular de la actividad matemática, consiste en crear modelos.

Cabe destacar que, los intentos de hacer uso de la modelización matemática como un método de enseñanza-aprendizaje, han mostrado su eficacia principalmente en proyectos de «Iniciación Científica» y en cursos de «Perfeccionamiento de Profesores», cuando no se dispone a priori de un programa que ha de ser cumplido, por lo menos secuencial y, objetivamente; sobre todo en el uso de las matemáticas con miras a mejorar la comprensión de las situaciones escogidas como tema de estudio.

A modo de explicación, por un lado, un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones; por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática (Blomhoj, 2004). Por lo tanto, estos aspectos fundamentales del concepto de modelo tienen significativas implicaciones didácticas.

En primer lugar, esto implica que, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. Segundo, para que un estudiante experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y a la matemática en juego como dos objetos separados, pero al mismo tiempo interrelacionados.

Educación matemática realista, ¿quién es su fundador? ¿en qué consiste?, ¿cuáles son sus principios? y ¿cómo se desarrolla?

La «*Educación Matemática Realista*» (en adelante, EMR) es una teoría desarrollada por el educador, matemático, topólogo y algebrista alemán Dr. Hans Freudenthal (1905-1990), esta teoría nace en Holanda como reacción al movimiento de la Matemática Moderna de los años 70 y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática, generalizado en ese entonces en las escuelas holandesas.

Hans Freudenthal obtiene su grado de doctor en la Universidad de Berlín luego, emigra a Holanda donde desarrolló su carrera académica como matemático y sus teorías pedagógicas, ese desplazamiento de un país a otro fue debido a su origen judío y a causa de la llegada de los nazis al poder en el año 1933. Posteriormente, este hecho lo afectó también en ese país, en el cual debió permanecer oculto durante los años de la II Guerra Mundial.

Según Bressan, Zolkower y Gallego (2004), Freudenthal presenta constantemente posturas opuestas a las que tradicionalmente se han asumido en el terreno pedagógico didáctico, por considerar, según su concepción, que no representaban el proceso correcto para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, todo ello devenido de su larga experiencia en las aulas y de su amplio conocimiento de esta disciplina.

Es por esta razón que Freudenthal, confronta algunas ideas y teorías del aprendizaje de algunos notables como Piaget, Gagné, Bloom, entre otros. No obstante, "*la EMR no pretende ser una teoría general del aprendizaje (como lo es, por ejemplo, el constructivismo), sino que es más bien una teoría global (una «filosofía» según Freudenthal)*" (Bressan et al., ob. cit., p. 3).

En la EMR, los estudiantes deben aprender Matemáticas desarrollando y aplicando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos. Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1973) "*No hay Matemáticas sin matematización*" (p. 134); el cual consideraba la matemática como una actividad humana para buscar y resolver problemas, y no un cuerpo de conocimientos, es decir, una actividad para organizar a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó «*matematización*».

En el ámbito de la Educación Matemática, esta visión está muy presente en los planteamientos de la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991), que parte de la base que las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales o realistas, es decir, en situaciones de la vida cotidiana u otros contextos que son reales en la mente de los alumnos.

La EMR, se basa en la idea de que la matemática si ha de tener valor humano, esta debe estar conectada con la realidad, mantenerse cercana a los niños y ser relevante para la sociedad, aunque no todos los niños van a ser matemáticos en la edad adulta, pero sí todos los adultos usaran las matemáticas para resolver los problemas de la vida cotidiana.

Considerando estas ideas, diversos autores han descrito la EMR a partir de los siguientes principios (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Martínez, Da Valle, Zolkower y Bressan, 2002; Bressan, Zolkower y Gallego, 2004; Alsina, 2009, 2011):

1. *De actividad*: las matemáticas son una actividad humana y su principal finalidad es matematizar u organizar el mundo que nos rodea.

2. *De realidad*: las matemáticas se aprenden a partir de contextos reales o realistas.

3. *De niveles*: la comprensión de las matemáticas pasa por distintos niveles, que incluyen el nivel situacional (en el contexto de la situación); el nivel referencial (esquematización a través de modelos, descripciones, entre otros); el nivel general (exploración, reflexión y generalización); y, finalmente, el nivel formal (procedimientos estándares y notación convencional).

4. *De reinvención guiada*: el conocimiento matemático formal se reconstruye a través de la mediación del profesor.

5. *De interacción*: la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, en ese sentido, la interacción entre los mismos estudiantes, así como entre estudiantes y profesores, puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás para poder alcanzar niveles más altos de comprensión.

6. *De interconexión*: los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría, etc.) no pueden ser tratados como entidades separadas.

En ese orden, la EMR para Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016), tiene como idea central "*que la enseñanza de la matemática debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en orden a constituirse en un valor humano*" (p. 2). Es decir que, debe partir de las realidades concretas para luego ser llevadas a entidades abstractas que el ser humano ya procesa de manera natural en su cerebro, porque la Matemática no es una materia o una asignatura sino parte de la vida misma del ser humano.

En ese contexto entonces, se trata de matematizar la cotidianidad, la realidad, haciendo de ella un valor, un patrón o un modelo que explica los fenómenos del día a día.

En su etapa inicial la EMR, según De Lange (1996), se sustentó en las siguientes características:

- El uso de contextos como vehículos para el crecimiento entre lo concreto y lo abstracto.

- El uso de modelos como columna vertebral del progreso.

- El uso de las construcciones y producciones libres de los alumnos en los procesos de enseñanza/aprendizaje.

- El entrelazado de los diversos ejes en el currículum de matemáticas.

Actualmente, la EMR se fundamenta en los principios que se mencionan a continuación de forma muy sintética (De Lange 1996, Freudenthal 1991, Gravemeijer 1994):

-. Pensar la matemática como una actividad humana (a la que Freudenthal denomina *matematización*) y que, siendo así, debe existir una matemática para todos.

-. Aceptar que el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los *contextos* y los *modelos* poseen un papel relevante y que ese desarrollo se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado *reinvención guiada*, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

-. Que, desde el punto de vista curricular, *la reinvención guiada* de la matemática en tanto actividad de matematización, requiere de la *fenomenología didáctica* como metodología de investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la *historia de la matemática* y las *invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.*

Así, pues, de forma muy reduccionista, los rasgos más significativos de la EMR son los siguientes:

- Se trata de un enfoque en el que se utilizan situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002).

- Se apoya en la interacción en el aula entre los mismos estudiantes, así como entre el profesor y estos. Esta acción, que debe ser intensa, permitirá a los docentes construir sus clases teniendo en cuenta las producciones de los dicentes (Fauzan, Plomp y Slettenhaar; 2002).

- Otra idea clave es que a los educandos se les debería dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto en lugar de intentar trasmitirles una matemática preconstruida (De Corte, Greer y Verschaffel, 1996).

Para Freudenthal (1991), la matemática no es otra cosa que una forma de sentido común solo que más organizada, quien señala:

> *Para transformarlo en matemática genuina y para progresar, el sentido común debe ser sistematizado y organizado. Las experiencias del sentido común cristalizan en reglas (por ejemplo, la conmutatividad de la suma) y estas reglas se transforman de nuevo en sentido común, pero a un nivel más alto, constituyendo así la base para una matemática de orden aún mayor, una jerarquía tremenda, construida gracias a un notable interjuego de fuerzas*. (p. 13).

Este proceso se realiza en las aulas conjugando los roles y responsabilidades del docente y del alumno a través de una forma de interacción que Freudenthal (ob. cit.) denomina «reinvención guiada» y la entiende como el equilibrio entre la independencia de crear y la potencia de guiar.

Modelación matemática en las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

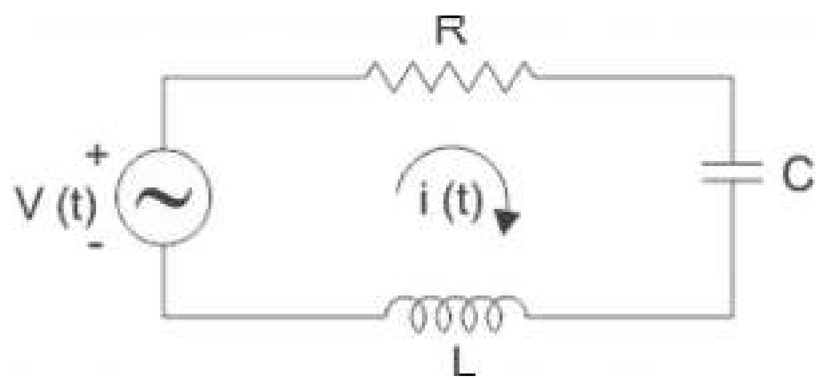
Para dar inicio a este apartado, es importante precisar lo concerniente a la educación de adultos; para ello, se considera a Malcolm Knowles (1913-1997), quien introdujo la teoría de la «*andragogía*» como el arte y la ciencia de ayudar a adultos a aprender. Aunado a esto, él consideraba "*[…] los adultos aprenden de manera diferente a los niños y que los facilitadores deben utilizar* *estrategias diferentes para guiar el aprendizaje*" (Rodríguez, 2015, p. 274); en este caso, se hace necesario considerar el principio de horizontalidad el cual se refiere al educando adulto y el facilitador al momento de aprender y enseñar se hallan en contextos similares; es decir, desde una direccionalidad de iguales cuando comparten saberes en los escenarios didácticos.

Ahora bien, una de las asignaturas de mayor importancia en la formación de ingenieros, por su amplia relación con fenómenos físicos y sociales, son las Ecuaciones Diferenciales, estas nos transportan a la modelización de problemas del entorno; en este sentido, entenderemos por «*modelización matemática*», al traslado de un problema del mundo real a un problema matemático, resolver el problema matemático y, por último, interpretar la solución en el lenguaje del mundo real. A pesar de ello, la enseñanza de esta materia ha estado subordinada a la memorización de procedimientos analíticos lo que ha llevado a la incomprensión de sus aplicaciones en los diversos contextos profesionales (Artigue, 1995; Blanchard, 1994).

Para ilustrar, una aplicación de la modelización matemática en un curso de EDO para estudiantes de ingeniería se presenta, por ejemplo, en la clase que corresponde a introducir el método analítico para resolver una EDO Lineal de Segundo Orden no Homogénea y con Coeficientes Constantes, la ecuación general de la forma $Ay'' + By' + Cy = D(x)$, con $A \neq 0$. En esta clase, normalmente, se decide debido a la enseñanza por medio de la modelación, que la actividad inicie justamente en la necesidad de comprender la modelación de un fenómeno eléctrico, considerando un circuito eléctrico y aplicando las «*Leyes de Kirchoff*» se llega a la ecuación $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i =$

$E_0\omega\cos(\omega t)$, donde la corriente «i» es función del tiempo «t» en el circuito. En la Figura 1, se muestra un circuito eléctrico RCL (resistencia, capacitancia e inductancia) según Alexander y Sadiku (2006).

***Figura 1*: Circuito eléctrico RCL**



Las ventajas de introducir la modelización en las aulas, junto a la aplicación de las matemáticas y la resolución de problemas, han sido ya reflejadas en diversos artículos (Blum y Niss, 1991, Burkhardt, 2006), proporcionándose numerosos argumentos en su favor, entre los que se destaca: *pragmáticos*, la enseñanza de las matemáticas debe servir para ayudar a los alumnos a entender, analizar, evaluar y juzgar situaciones y problemas del mundo real, para los que la modelización es indispensable; *formativos*, la modelización, la aplicación de las matemáticas y la resolución de problemas son los medios adecuados para desarrollar competencias en los alumnos; *culturales*, la modelización, las aplicaciones y la resolución de problemas constituyen una categoría fundamental en todos los procesos creativos matemáticos; y *psicológicos*, la incorporación de la modelización puede ayudar a tener una comprensión más profunda y a facilitar la retención de los conceptos, nociones, métodos y resultados matemáticos.

La introducción de la modelización en el aula supone un cambio metodológico importante, para esto, es recomendable promover el trabajo en pequeños grupos (en la experiencia de los autores de este ensayo, se deben formar grupos de 2 o 3 miembros) y las estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje cooperativo (como las descritas en Borromeo-Ferri, 2018, p. 6). Asimismo, los educandos deben asumir el protagonismo y trabajar de forma autónoma en la resolución de las tareas planteadas (Blum y Borromeo-Ferri, 2009, Blum, 2011). Mientras, el profesor debe asumir un papel de facilitador (Burkhardt, 2006), en el que su principal objetivo será apoyar a los dicentes en la superación de sus bloqueos y dificultades, manteniendo un permanente equilibrio entre su rol de guía, el cual debe ser mínimo, y la independencia de sus discípulos, que debe ser máxima.

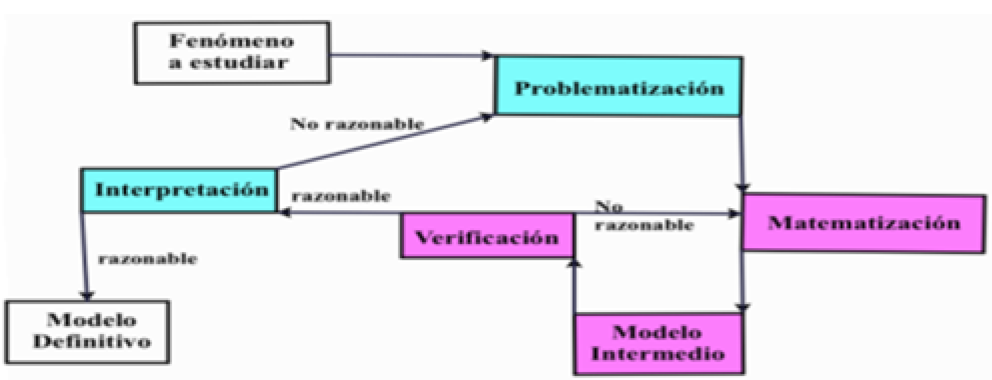
La Modelación Matemática, entre otros elementos, está constituida por un «*modelo matemático*» que puede ser: una función, una ecuación, una desigualdad, una tabla, una gráfica o cualquier otro objeto matemático y, al ser usada en el aula como estrategia de aprendizaje se puede caracterizar por las siguientes fases:

(a) Identificar el fenómeno físico que se quiere estudiar, (b) convertir los aspectos que interesan del fenómeno en un problema a resolver, ya sea planteando preguntas o conjeturas, (c) matematizar el problema definiendo las variables involucradas y los datos relevantes para determinar la relación entre ellas, (d) proponer un modelo matemático con la información obtenida (a saber, modelo intermedio), (e) verificar el modelo intermedio para determinar si cumple con las condiciones del problema matematizado, (en caso de que el modelo no sea satisfactorio es necesario regresar a la fase de Matematización con el fin de revisar la pertinencia tanto del problema matemático como la del modelo, en este punto es posible que se forme un ciclo «*Matematización-Modelo Intermedio-Verificación*», llamado *Ciclo Matemático*, el cual se rompe cuando el modelo intermedio satisfaga la verificación).

(f) Interpretar el modelo intermedio satisfactorio con respecto al fenómeno problematizado, (si la interpretación del modelo no es consistente con el fenómeno problematizado, se entraría en un ciclo más amplio «*Problematización-Ciclo Matemático-Interpretación*», llamado *Ciclo de Interpretación* que se rompería cuando el modelo matemático es consistente con el fenómeno) y, por último, (g) modelo matemático definitivo obtenido después de la fase de Interpretación.

En la Figura 2, se presenta un diagrama de flujo mostrando el desarrollo de la modelación en el aula según Flores y Falconi (2013).

***Figura 2*. Proceso de modelación matemática en el aula**



El proceso se inicia con la intención de estudiar un cierto fenómeno físico, éste se traduce en un problema o una serie de problemas a ser resueltos en lo que hemos llamado Problematización. Una vez problematizado el fenómeno, procedemos a expresarlo en términos matemáticos, es decir, lo matematizamos convirtiéndolo en un problema matemático. La solución del problema es un modelo que hemos llamado intermedio pues es necesario verificar que realmente esté resolviendo el problema de manera razonable. De no ser este el caso, se regresa al problema en busca de un modelo más adecuado, hasta que nos parezca razonable o resuelva realmente el problema matemático. Cuando el modelo es aceptable pasamos a interpretarlo en términos del problema original y si la interpretación no es razonable, iniciamos el proceso revisando nuestro problema o planteando uno nuevo, hasta llegar a un modelo definitivo. En este esquema podemos entrar en dos ciclos, uno que cae enteramente en el ámbito matemático y se refiere a la solución del problema matematizado, y el otro que tiene que ver con la interpretación del modelo y que incluye el ciclo anterior.

Si se desea preparar a economistas, ingenieros, matemáticos, biólogos, entre otros, para la modelización de problemas complejos, en los que una masa de información irrelevante oscurece el objetivo central y, además, la habilidad principal consiste en destacar dicho objetivo y seleccionar la información necesaria, entonces la formación debe diferir claramente de la tradicional, en la cual según Brousseau (1986), las clases están dirigidas a comprender conceptos abstractos, demostrar teoremas y resolver ecuaciones, muy conveniente para la formación de matemáticos puros; pero insuficientes para el que va a aplicar la matemática o en la formación inicial de un profesor de matemática (Almeida, V., Bruna, A., Espinel, M.C., García, J.A., Bermúdez, M., González, M., 1998).

En el ámbito de la Educación Matemática, se reconoce la importancia de la «Resolución de Problemas» como estrategia en la construcción del sentido de un conocimiento matemático, y como herramienta para desarrollar procesos de: interacción, argumentación, modelización y toma de decisiones (Charnay, 1988; González, 2007; De Guzmán Ozamiz, 1997).

Siguiendo la idea anterior, si desde la enseñanza obligatoria se llegara al conocimiento matemático resolviendo problemas en íntima conexión con la vida diaria, las ciencias humanas o con la física, y se educara al alumno en la modelización de tales problemas, entonces el ciudadano medio tendría un mejor concepto sobre la necesidad, el interés y el poder de las Matemáticas. Por todo ello, existe en la actualidad una corriente en Educación Matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas se realice en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y le siguen dando su motivo y vitalidad.

Uno de los conceptos básicos de la EMR es la idea de Freudenthal (1973) de las matemáticas como una actividad humana, como se ha señalado, para él las matemáticas no eran el cuerpo de conocimientos matemáticos, sino la actividad de resolver problemas, buscar problemas y, en términos más generales, la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó «matematización» (Freudenthal, 1973). En términos muy claros, Freudenthal (1973) explicó de qué tratan las matemáticas; "*No hay matemáticas sin matematización*" (p. 134).

Esta interpretación de las matemáticas basada en la actividad tuvo también consecuencias importantes respecto a cómo se conceptualizaba la Educación Matemática. De un modo más preciso, afectó tanto los objetivos de la Educación Matemática como los métodos de enseñanza, según Freudenthal, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo (*ibid.*, 1973, 1991), y la matematización es la meta central de la Educación Matemática "*Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas*" (Freudenthal, 1973, p. 7).

En ese sentido, Bressan et al. (2006) basados en las ideas de la EMR proponen los siguientes niveles de matematización: situacional, referencial, general y formal, los cuales representan el pasaje de conocimiento informal al formal.

Retomando la idea de las ecuaciones diferenciales, éstas constituyen uno de los cursos con mayor número de aplicaciones tanto en licenciaturas de matemáticas como en las de ingeniería o economía. Además, es un curso en el que el desarrollo reciente de las investigaciones en matemáticas y el de la tecnología imponen, en principio, el diseño de nuevas estrategias didácticas. La investigación acerca del aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias ha estado presente en la investigación en Educación Matemática desde hace muchos años. Algunos autores trabajaron este tema desde el ámbito de la matemática en contexto, por ejemplo, Camarena (1987) llevó a cabo el análisis y desarrollo de un curso relacionado con los circuitos eléctricos para favorecer el interés y la motivación de los estudiantes.

Los modelos matemáticos usados en las EDO son los llamados «*modelos determinísticos*», es decir, son aquellos en los cuales los valores de las variables están especificados de forma precisa para cualquier conjunto de condiciones establecidas. Adicional a lo anterior, el «*modelo estacionario*» considera que no existen variaciones con respecto al tiempo de las diferentes variables y parámetros del sistema. Por el contrario, un «*modelo no estacionario*» considera variaciones con respecto al tiempo, estos modelos también se denominan transitorios o dinámicos, los cuales, sin duda son de mayor complejidad que los modelos estacionarios.

Al respecto, Brito-Vallina et al. (2011), comentan que:

> *Las ecuaciones diferenciales ordinarias se utilizan para la descripción matemática de regímenes no estacionarios de los modelos con parámetros combinados, así como regímenes estacionarios de modelos con parámetros distribuidos, en los cuales los valores de los parámetros solo dependen de una coordenada espacial. En el primer caso, en calidad de variable independiente se utiliza el tiempo; en el segundo, la coordenada espacial. Este tipo de descripción matemática tiene una amplía utilización ya que, el tratamiento matemático no es muy complejo*. (p 136).

Reflexiones finales de los autores

El desarrollo de habilidades algebraicas y algorítmicas por sí solas no garantiza la comprensión de los conceptos básicos de las ecuaciones diferenciales ordinarias, ahora bien, si a las habilidades anteriores le agregamos la realización de problemas situacionales de la vida cotidiana, esto llevaría sin lugar a duda al estudiante a crear actividades de «*modelación*», es decir; a plantear y resolver problemas de fenómenos físicos usando «*modelos matemáticos*» ya existente, a utilizar un leguaje simbólico matemático y a crear procesos de metacognición; mejorando considerablemente la comprensión de las EDO.

Siguiendo la idea anterior, lo que proponen los autores de este escrito ensayístico, no es enseñar «*modelización*» como área de aplicaciones matemáticas a otras ciencias sino, enseñar Matemáticas usando la «*modelación*».

En la EMR, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando y aplicando conceptos, y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos, sin perder de vista que, esto impone ciertas exigencias a una situación problema de esta índole entre ellas, tenemos; que la situación problema pueda esquematizarse fácilmente y que desde el punto de vista de los estudiantes, exista la necesidad de construir modelos, en ese sentido, este aspecto demanda que el problema incluya actividades que estimulen modelos como, por ejemplo, planear y ejecutar etapas de soluciones, generar explicaciones, identificar semejanzas, diferencias y hacer predicciones.

La Educación Matemática Realista, ofrece un marco teórico y metodológico que podría ser fructífero para promover un acercamiento particular a los procesos de «*modelación matemática*» en el aula y materializarse en estrategias de intervención en las aulas de matemáticas. En efecto, este ensayo en el contexto de la EMR puede extenderse a otros dominios matemáticos y entrar en contacto con enfoques en Didáctica de las Matemáticas que también abordan desde lo teórico y metodológico la modelación matemática o entrar en contacto con enfoques de la modelación matemática que se realizan en el marco del trabajo con las tecnologías de la información y la comunicación en la escuela.

Para desarrollar en los alumnos competencias en la construcción y uso de modelos matemáticos, plantearse situaciones problemáticas resulta muy enriquecedor. Ausubel (2002), sostiene que lo importante para lograr un conocimiento significativo es que el nuevo conocimiento se relacione con los anteriores, pero a la vez se introduzcan diferencias entre ellos. En este sentido, consideramos que el trabajo con modelos matemáticos sencillos propicia en los estudiantes la adquisición de conocimientos significativos, ahora bien, para resolver una situación problemática más compleja los estudiantes apoyados en modelos sencillos deben elaborar nuevas estrategias, buscar nuevas relaciones, revisar teorías y evaluar la coherencia del producto, como corolario de esto.

El empleo de este tipo de aplicaciones resulta positivo ya que permiten al estudiante relacionar conocimientos adquiridos con situaciones nuevas, fortaleciendo la relación existente entre la teoría y la realidad, además, ayuda al educando a aprender a interpretar dicha realidad mediante modelos y, por sí solas, presentan actividades motivadoras para los estudiantes pues rompen con los rígidos esquemas de ejemplos clásicos, adicionalmente, los autores queremos aclarar qué; los contextos de los modelos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real, es decir, el mundo de fantasía de los cuentos de hadas, e incluso el mundo formal de las Matemáticas, son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean "reales" en la mente de los estudiantes.

Para concluir, investigaciones realizadas a pesar de las dificultades, han mostrado que la inserción de modelos matemáticos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es un medio que propicia un mejor desempeño del estudiante, convirtiéndolo en uno de los principales agentes de cambio.

Referencias

Adler, I. (1968). *Mathematics and Mental Growth*. New York: National Council of Teachers of Mathematics. USA.

Alexander, C. y Sadiku, M. (2006). *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*. Tercera Edición. McGraw-Hill. México, D.F.

Almeida, V., Bruna, A., Espinel, M.C., García, J.A., Bermúdez, M., González, M. (1998). *Matemáticas Para Nuestro Tiempo*. Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Canarias.

Alsina, Á. (2009). "El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado". En M.J. González, M.T.

González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII.* (pp. 119-127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años*. Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, Á., García, L., Gómez, J. y Romero, S. (2007). "Modelling in science education and learning". *SUMA.* (Vol. 54, p. 51-54).

Artigue, M. (1995). "El lugar de la didáctica en la formación de profesores". En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica. (pp. 7-23).

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento*. Paidós, Barcelona, Buenos Aires.

Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). "Modelación matemática. Una antigua forma de investigación - un nuevo método de enseñanza". *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. (No. 32, p. 13-35).

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). "Modelación Matemática y los Desafíos para Enseñar Matemática". *EDUCACIÓN MATEMÁTICA.* (Vol. 16, No. 2, p. 105-125).

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2004). *Los Principios de la Educación Matemática realista. En Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Compilador: Alagia, H. y otros. Editorial Libros del Zorzal.

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, F. (2006). "La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática". Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. *Yupana.* (Vol. 3, No. 6, p. 11-33).

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista*. Bases Teóricas.

Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. y Arias-de Tapia, R. (2011). "Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros". *Ingeniería Mecánica.* (Vol. 14, No. 2, p. 129-139).

Brousseau, G. (1986). "Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques". *Recherches En Didactique des Mathématiques.* (Vol. 7.2, p. 33-115).

Blanchard, P. (1994). "Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint". *The College Mathematics Journal.* (Vol. 1, No. 25, p. 385-393).

Blomhoj, M. (2004). "Mathematical modelling - A theory for practice". En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education. Suecia. (pp. 145-159).

Bloom, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (2007). *Modeling and applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI study. New York: Springer.

Blum, W. (2011). "Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research". En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer. (Pp. 15-30).

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). "Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?" *Journal of Mathematical Modelling and Application.* (Vol. 1, No. 1, p. 45-58).

Blum, W. y otros (2003). *ICMI-Study 14. Applications and modelling in mathematics education*. Discussion Document. Special issue of ICMI – Bulletin (2003).

Blum, W. y Niss, M. (1991). "Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects? State, Trends and Issues in Mathematics Instruction". *Educational Studies in Mathematics.* (Vol. 22, p. 37-68).

Bolea, P., Bosch, P. y Gascón, J. (2004). "Why is modelling not included in the teaching of algebra at secundary School". *Quadernidi Ricerca in Didattica*. (Vol. 14, p. 125-133).

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.

Burkhardt, H. (2006). "Modelling in Mathematics Classrooms: reections on past developments and the future". *Zentralblatt fr Didaktik der Mathematik.* (Vol. 38, No. 2, p. 178-195).

Camarena, G. P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. [Trabajo de Grado de Maestría no Publicado]. México, Cinvestav, IPN.

Charnay, R. (1988). "Aprender (por medio de) la resolución de problemas". En Parra y Saiz (comps), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Paidós, Buenos Aires. (pp. 51-63).

De Corte, E., Greer, B. y Verschaffel, L. (1996). “Mathematics Teaching and Learning”. En D. Berliner y C. Calfee (Eds.). *Handbook of Educational Psychology.* (pp. 491-549). New York: Simon & Schuster Macmillan.

De Guzmán Ozamiz, M. (1997). *Aventuras Matemáticas*. Ediciones Pirámide, Madrid.

De Lange, J. (1996). “Using and applying mathematics in education”. En A.J. Bishop (Ed). *International Handbook of Mathematics Education, Part I.* (pp. 49-97). Utrecht: Kluwer Academia Press.

Fauzan, A., Plomp, T. y Slettenhaar, D. (2002). “Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for Changes”. En *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference.* (pp. 1-4). Copenhagen: Centre for Research in Learning Mathematics.

Flores, A., y Falconi, M. (2013). “Enseñanza-Aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante Modelación Matemática”. (pp. 1850-1857). *Actas del VII CIBEM*. Montevideo, Uruguay.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel Publis. Co.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

González, F. (2007). “Cómo desarrollar clases de matemática centradas en Resolución de Problemas”. En Abrate, R. & Pochulu, M. (Comps.). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática*. Universidad Nacional de Villa María. (pp. 235-262). Disponible en: http://www.gratisweb.com/unvm/Introduccion.pdf

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: Freudenthal Institute.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). “Realistic mathematics education as work in progress”. En Fou-Lai Lin (Eds.). *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education.* (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Martínez, M., Da Valle, N., Zolkower, B. y Bressan, A. (2002). “La relevancia de los contextos en los contextos en la Resolución de Problemas de Matemática: una experiencia para docentes y sus capacitadores”. *Paradigma.* (Vol. 23, No. 1, p. 59-94).

Monereo, C. (2000). *Habilidades para sobrevivir en el siglo XXI, la sociedad del conocimiento*. Conferencia. VTTT Jomada Pedagógicas de la Escuela Superior de Nayarit. Tepic, México.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2008). "La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación". *PNA.* (Vol. 2, No. 4, p. 181-189).

Rodríguez, C. (2015). "Andragogía en Venezuela: un proceso histórico en la educación y formación de adultos". *Revista: Ciencias de la Educación.* (Vol. 26, No. 47, p. 271-283). http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/47/art17.pdf

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.* Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). "The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage". *Educational Studies in Mathematics.* (Vol. 54, p. 9-35).

Villa, J. A. (2007). "La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo". *Tecno Lógicas*. (Vol. 19, p. 63-85).