Revista ARJÉ
Vol. 18. N° 35. Edición julio - diciembre 2024
ISSN Versión impresa 1856-9153
ISSN Versión digital 2443-4442

# UNA TÉCNICA ALTERNATIVA Y LA TEORÍA APOE PARA LA DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES. CASO: FACTORES LINEALES NO REPETIDOS

# AN ALTERNATIVE TECHNIQUE AND THE APOS THEORY FOR PARTIAL FRACTION DECOMPOSITION. CASE: NON-REPEATED LINEAR FACTORS

**Franzyuri Fernando Hernández Fajardo**
franzyurihernandez@gmail.com
fhernan@uc.edu.ve
ORCID 0000-0002-2748-8005
Departamento de Matemática y Física. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela
**Esteban Marino Flores Revette**
marinorevette@gmail.com
eflores@uc.edu.ve
ORCID 0000-0002-1807-9496
Departamento de Matemáticas Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela

Recibido: 12/09/2024 - Aprobado: 28/11/2024

**Resumen**

La Didáctica de la Matemática se ocupa de delimitar y estudiar problemas surgidos durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático junto con su propia fundamentación teórica. Dentro de estos problemas de investigación se encuentran aquellos creados al desarrollar Técnicas Alternativas para la enseñanza de tópicos matemáticos. En ese sentido; el presente artículo muestra una Técnica Alternativa para el desarrollo de la Descomposición en Fracciones Simples (factores lineales no repetidos), ésta fue creada para evitar el uso de sistemas de ecuaciones durante el proceso de descomposición y, ha sido fundamentada con la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema ("APOE" ) de Ed Dubinsky.

**Palabras clave:** técnica alternativa, descomposición en fracciones simples, teoría "APOE".

**Abstract**

The Didactics of Mathematics deals with delimiting and studying problems that arise during the processes of organization, communication, transmission, construction, and assessment of mathematical knowledge, along with its own theoretical foundation. Within these research problems are those created when developing Alternative Techniques for teaching mathematical topics. In that sense; this article shows an Alternative Technique for the development of Partial Fraction Decomposition (non-repeated linear factors), it was created to avoid the use of systems of equations during the decomposition process and has been based on the Action, Process, Object, and Scheme ("APOS") theory by Ed Dubinsky.

**Keywords:** alternative technique, partial fraction decomposition, "APOS" theory.

## Introducción

En un primer curso de cálculo integral se estudian varias técnicas de integración, entre ellas la técnica de integración por Fracciones Parciales (en adelante, FP) para la integración de funciones racionales. Esta técnica consiste en descomponer una función racional en una suma de fracciones más simples. La técnica es fundamental para la integración de funciones racionales, pero también se encuentra en el estudio de las ecuaciones diferenciales, en la matemática discreta, en la teoría de control y otras ramas de la matemática. El método más común para realizar la descomposición en FP es llamado método de los "*Coeficientes Indeterminados*". Este método es tedioso (Huang, 1991) y una fuente de complicadas identidades algebraicas (Chrystal, 1961) que confunden a los estudiantes de un primer curso de cálculo integral, sobre todo a aquellos con problemas de conocimientos algebraicos (Díaz, 2017). Adicional a lo anterior, este método tradicional se fundamenta en el uso de *sistemas de ecuaciones*.

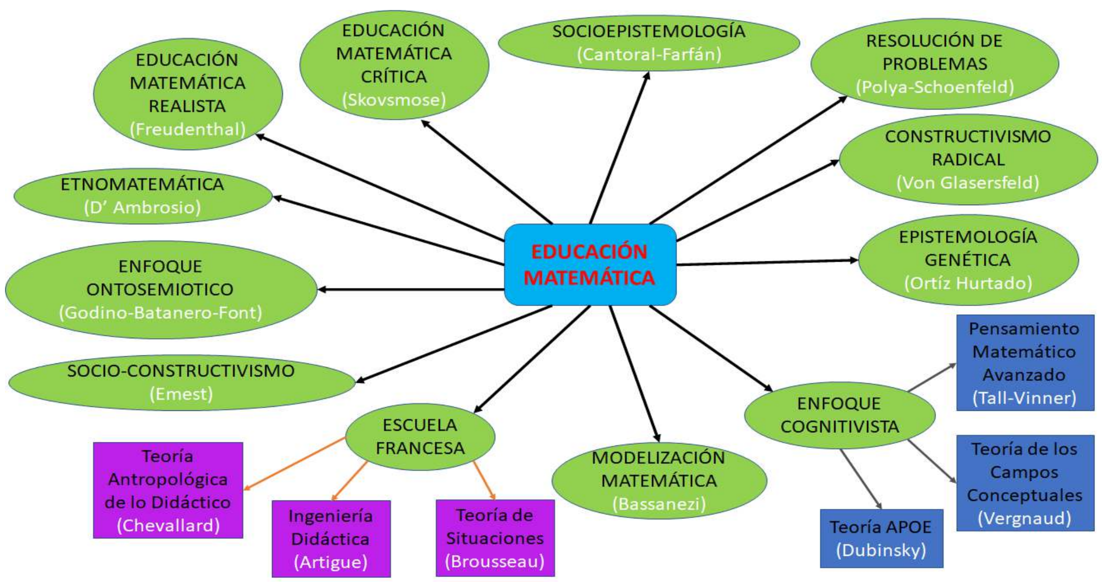
En otro orden de ideas; cuando se habla de *Educación Matemática* se hace referencia a: **1**. un objeto matemático de estudio, **2**. un profesional dedicado socialmente a la formación matemática y **3**. una ciencia que ofrece las herramientas necesarias para que el docente resuelva los problemas que se le presentan durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula de clase.

En ese sentido; la *Didáctica de la Matemática* es la ciencia que se ocupa de estudiar e investigar los problemas de la *Educación Matemática* y proponer marcos explicativos para su resolución. Indaga metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y los planes de formación de los educadores matemáticos. Tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático junto con su propia fundamentación teórica.

Siguiendo la idea anterior; se presenta en la Figura 1 un diagrama con las principales teorías actuales en *Educación Matemática*, en el mismo se ubica la teoría de interés para la presente investigación.

**Figura 1**

*Principales teorías de Educación Matemática*




Fuente: Rodríguez (2021)

De ese grupo de teorías, en la presente investigación, solo es de interés; la teoría del enfoque cognitivista; *Acción, Proceso, Objeto y Esquema* (**APOE**) de Ed Dubinsky.

Además; en este artículo se presenta una «*Técnica Alternativa*» que busca realizar la «*Descomposición en Fracciones Simples*» sin necesidad de usar *sistemas de ecuaciones* durante el proceso, ésta es una técnica algebraica que se desarrolla por simple inspección y para darle rigor dentro del campo de la «*Educación Matemática*» la misma ha sido sustentada con la teoría «*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*» (ver Hernández, $2024$).

**Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema**

La teoría $APOE$ fue creada por el matemático Ed Dubinsky en $1990$, éste era especialista en el área de Análisis Funcional y su formación académica la realizó en la Universidad Temple (BS), Universidad de Pennsylvania (MA) y la Universidad de Michigan (PhD). En palabras de Rodríguez *et al*., $(2018)$ $APOE$ "*… es una teoría constructivista que toma como marco de referencia las ideas de Piaget respecto al desarrollo del conocimiento; fundamentalmente rescatando el concepto de abstracción reflexiva y el concepto de esquema*" (p. 5). Ésta surge como un intento de entender y describir cómo los individuos construyen las estructuras «lógico-matemáticas» durante el curso del desarrollo cognitivo a través de la «abstracción reflexiva». En otras palabras, permite centrar la mirada en los aspectos cognitivos de la construcción de conocimientos matemáticos. Es decir; describe el camino y la construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático.

*Estados Mentales Cognitivos*. Según expresa Trigueros ($2005$), desde el punto de vista de la teoría $APOE$ la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: *acción*, *proceso* y *objeto*. El paso por estas tres etapas no es necesariamente secuencial. Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por *proceso* en la teoría que cuando lo hace a nivel *acción*, y cuando lo hace a nivel *objeto* que cuando lo hace a nivel *proceso*.

A continuación, se dará una breve explicación de las cuatro construcciones mentales, que se dan durante el mecanismo de adquisición de un conocimiento matemático, según la teoría $APOE$.

**1**. *Acción*. Las acciones se pueden percibir como procedimientos memorizados que normalmente se realizan paso a paso y que se responden de manera muy concreta. En ese sentido; una *acción* puede consistir en una simple repuesta o en una secuencia de respuestas después de haber recibido indicaciones exactas de los pasos o secuencias que se deben realizar.

**2**. *Proceso*. El proceso es una estructura dinámica que se realiza cuando se ejecuta la misma *acción*, pero ésta no necesariamente está dirigida por estímulos externos al individuo, ya que ocurre por la reflexión ante una *acción* realizada repetidas veces. En otras palabras; cuando se repite una *acción* o un conjunto de *acciones* y se reflexiona sobre ellas la *acción* se *interioriza* en un *proceso*. A diferencia de la construcción de la *acción* el estudiante percibe el nivel *proceso* como algo interno y bajo su control ya que no está dirigido por alguna indicación externa.

**3**. *Objeto*. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un *proceso* en particular, toma conciencia del *proceso* como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean *acciones* o *procesos*) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este *proceso* como un *objeto*. Trigueros $(2005)$ dice que; un *objeto* se crea "cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él" (p. 9), esta descripción es un mecanismo mental que se conoce como *encapsulación* del *proceso*.

**4**. *Esquema*. Es una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que se asumen como la interacción de los mecanismos caracterizados por ser dinámicos y por permitir una reconstrucción continua en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las prácticas de aula con relación a la matemática escolar.

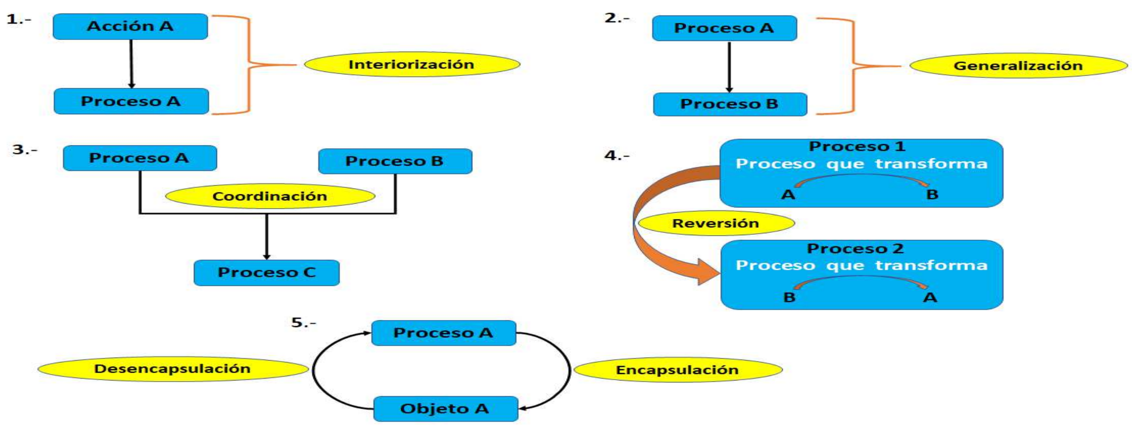
*Mecanismos Mentales*. En este panorama teórico, otro aspecto de interés para esta investigación son los distintos mecanismos que utiliza un individuo cualquiera para pasar de una estructura mental cognitiva a otra. A continuación, se presentan seis mecanismos mentales que esgrime la teoría $APOE$ como puente para pasar de una estructura cognitiva a otra.

**1**. *Interiorización*. Este mecanismo se presenta cuando se repiten las *acciones*, éstas ya no dependen de factores externos y el individuo ejercerse un dominio interno sobre ellas. En ese sentido; el individuo interioriza una *acción* cuando es capaz de imaginar todos los pasos sin aplicarlos necesariamente en su totalidad o en un orden estricto, además, cuando éste puede saltarse los pasos (Arnon *et al*., 2014). **2**. *Coordinación*. Este mecanismo se describe como la coordinación general de *acciones*, para referirse a la creación de más *objetos* y *acciones* a través del uso de una o más *acciones*. Él permite al individuo coordinar dos o más *procesos* para generar otro nuevo que puede ser encapsulado en un *objeto* cognitivo (Asiala *et al*., 1996). **3**. *Encapsulación*. Este mecanismo permite que el individuo pase de una estructura dinámica (*proceso*) a una estructura estática (*objeto*). Principalmente todas las características del proceso se estructuran como un todo sobre el cual es posible aplicar nuevas transformaciones. **4**.- *Desencapsulación*. Es el paso mental de devolverse desde un *objeto* al *proceso* desde el cual fue encapsulado el *objeto* o tuvo su origen. **5**.- *Reversión*. Una vez que el *proceso* existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo *proceso* original. **6**. *Generalización*. Es el mecanismo de construcción de un *proceso* a partir de otro previamente construido, para una mejor descripción de estos mecanismos (ver Hernández, 2024).

En la Figura 2 se muestra la relación entre los estados cognitivos y los mecanismos mentales.

## Figura 2

*Relación entre los estados cognitivos y los mecanismos mentales*




Fuente: Fuentealba (2017)

*Descomposición Genética*. Ahora bien; descritas las construcciones mentales, los mecanismos y sus relaciones según el enfoque de la teoría $APOE$, éstas se pueden representar en un modelo denominado *Descomposición Genética* (en adelante, $DG$). Éste es un modelo didáctico (o mapa cognitivo), realizado por el investigador para un objeto matemático en específico, que describe con detalle cómo se produce la comprensión del saber matemático a través de diferentes estructuras complejas del pensamiento y descripciones explícitas de las posibles relaciones entre las *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* (Arnon *et al*., 2014).

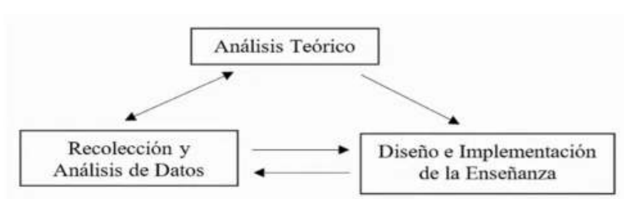
Una característica importante de la $DG$ es que este modelo no es único. Es decir; para un mismo concepto o tema matemático se puede diseñar más de una $DG$, este diseño dependerá de la visión de cada investigador, sin embargo, aquí, la pregunta de interés sería ¿cuál de los distintos modelos diseñados para el mismo concepto matemático es el más eficiente?

La única manera de dar respuesta a la pregunta anterior es poner a prueba cada $DG$ mediante investigación. Estas investigaciones se logran mediante el diseño y aplicación de instrumentos de recolección de datos basados en la $DG$ diseñada, observando qué *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* muestran los estudiantes. A partir de los resultados obtenidos en los instrumentos, la $DG$ puede desecharse o puede refinarse para luego, volverla a probar tantas veces como sea necesario hasta que el modelo funcione (se obtenga el modelo óptimo). Es decir; hasta lograr que el modelo funcione para predecir las construcciones mentales que hacen los estudiantes, una vez, llegado a ese punto se dice que la $DG$ es válida (Trigueros, 2005).

*Metodología de la Teoría $APOE$*. Para el diseño de la $DG$ del concepto, se tomó como referencia el ciclo de investigación propuesto por la teoría $APOE$ compuesto por: análisis teórico, diseño e implementación de un tratamiento instruccional y recogida y análisis de los datos, este ciclo se representa en la Figura 3.

**Figura 3**

*Aspecto metodológico o ciclo de investigación de la teoría $APOE$*




Fuente: Arnon *et al.*, (2014).

El ciclo comienza analizando el concepto matemático con base en los libros de texto, en la epistemología, en la experiencia docente, en el propio conocimiento del investigador, en resultados previos, etc., para, a partir de ahí, diseñar una *descomposición genética* para dicho concepto.

Esta *descomposición genética* se prueba, se analiza y en caso de ser necesario se vuelve a la *descomposición genética* y se refina hasta obtener la que arroje los resultados deseados para la investigación. Se sigue este ciclo las veces que sea necesario.

*Método de Enseñanza de la Teoría* $APOE$. Otro aspecto de interés en la teoría $APOE$ es que ésta tiene su propio método de enseñanza llamado ciclo $\boldsymbol{ACE}$, éste es el acrónimo de las palabras: ***A****ctividades*, ***C****lase* y ***E****jercicios*. A continuación, se realizará una explicación breve de cada una de estas etapas.

**1**. *Actividades*. La enseñanza fundamentada con la teoría $APOE$ inicia en el aula de clase con *actividades* diseñadas en función de una $DG$. El protocolo a seguir en esta etapa es; reunir a los estudiantes en pequeños grupos para que realicen trabajos colaborativos sobre las *actividades*, en esta fase los estudiantes debe ser guiado por el docente. En esta etapa del ciclo $ACE$ es válido, si se tiene, el uso de la tecnología.

**2**. *Clase*. Después de un tiempo prudencial de trabajo grupal, el docente llama a la discusión en *clase* promoviendo la reflexión y las construcciones mentales deseadas o previstas en la $DG$. Aquí se discute el trabajo que se ha hecho en los equipos, se cuestiona, se reflexiona conjuntamente y se va formalizando el conocimiento matemático de interés. Este paso entre *actividades* y discusión en *clase* se puede repetir varias veces en una misma sesión de clase generando así un bucle finito.

**3**. *Ejercicios*. Esta etapa contiene la posibilidad de que los estudiantes hagan, ya sea en el aula de clase o fuera de clase, ejercicios (o tareas) individuales o en equipos, esos *ejercicios* pueden ser diseñados por el docente, pueden ser generados a partir de la $DG$ o incluso pueden ser extraídos del libro de texto recomendado para el curso. Este trabajo constituye para el estudiante una nueva forma de reflexión ya sea individual o en equipo.

Para finalizar con este apartado, se puede decir que; el ciclo $ACE$ se debe repetir tantas veces como sea necesario para lograr un *aprendizaje significativo* de un tema o concepto matemático determinado.

## Descomposición en fracciones simples

Una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. La suma de funciones racionales es una función racional. Por ejemplo;

$$x^2+1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{x^4-3x^3+3x^2-x-1}{x^2-3x+2}\ .$$

En ese sentido, hay muchos casos donde se desea invertir este proceso. Es decir, a menudo es útil cuando se da la expresión: $(x^4-3x^3+3x^2-x-1)/(x^2-3x+2)$ y se desea reconocer que esa función racional es la suma de un polinomio y unas funciones racionales más sencillas;

$$x^2+1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\ .$$

En la literatura especializada; a las funciones racionales más sencillas se las suele llamar *fracciones simples* o *parciales*, ver (Haaser *et al*., $1974$).

A continuación, se mostrarán cuatro definiciones y un teorema para desarrollar el objeto matemático en cuestión.

Definición 1. (*Función Polinómica o Polinomio*). Son las funciones de la forma $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados coeficientes del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ (número natural) que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$.

Mientras la suma, el producto y la composición de funciones polinómicas es también una función polinómica, el cociente de funciones polinómica da lugar a las llamadas funciones *racionales* (Pérez: $2008$, $39$).

Definición 2. (*Función Racional*). Es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad (\mathbf{1})$$

donde $P$ (el numerador) y $Q$ (el denominador) son polinomios, además, $Q$ no es el polinomio constante igual a 0. La función $R$ tiene como dominio natural de definición el conjunto por comprensión $\{x \in \mathbb{R}: Q(x) \neq 0\}$. Obsérvese que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante igual a $1$).

Sumas, productos y cocientes de funciones racionales son también funciones racionales; y la composición de dos funciones racionales es también una función racional (Pérez: ob. cit., $39$).

Teorema 1. (*Algoritmo de la división*). Si $P$ es un polinomio de grado $\boldsymbol{n}$ y $Q\ (\neq 0)$ es un polinomio de grado $\boldsymbol{m}$, entonces existen polinomios únicos $M$ y $R$, donde $R$ es la función cero o tiene grado menor que $\boldsymbol{m}$, tales que; $P = Q \cdot M + R$.

Definición 3. (*Fracción Propia e Impropia*). Si $P/Q$ es una función racional y si el grado de $P$, denotado por $deg\ (P)$, es menor que el grado de $Q$, entonces $P/Q$ se llama *función racional propia*. Si $deg\ (P)\ \geq\ deg\ (Q)$, entonces $P/Q$ se llama *función impropia* (Díaz: $2017$, $26$).

Definición 4. (*Descomposición en Fracciones Simples*). Si $P/Q$ es una función racional impropia, entonces por el algoritmo de la división, existen polinomiales $M$ y $R$ con $R = 0$ o $deg\ (R)\ <\ deg\ (Q)$ tales que;

$$P = Q \cdot M + R \quad \text{ó} \quad \frac{P}{Q} = M + \frac{R}{Q}\ .$$

Así pues; si $P/Q$ es una función racional impropia, por división se puede escribir $P/Q$ como la suma de un polinomio $M$ y de una función racional propia $R/Q$ en caso de que $R \neq 0$. Si $R = 0$, entonces $P/Q$ es simplemente una función polinomial.

Es decir; supongamos que, $\boldsymbol{F}(x)$ es una fracción *impropia* entonces $\boldsymbol{F}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $deg\ (f)\ \geq\ deg\ (g)$. Luego, usando el algoritmo de la división $\boldsymbol{F}(x)$ se puede expresar como:

$$\boldsymbol{F}(x) = \underbrace{P(x)}_{Polinomio} + \frac{\overbrace{h(x)}^{Fracción\ Propia}}{g(x)} \quad .$$

Esto significa que (al menos teóricamente) toda *fracción impropia* puede expresarse de un modo único en forma de la suma de un polinomio y de una *fracción propia* (Díaz, ob. cit.).

Ahora bien, por el álgebra cualquier *fracción propia* puede ser descompuesta en una suma de $\boldsymbol{k}$ términos;

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \cdots + \boldsymbol{M}_{k-1} + \boldsymbol{M}_k\ . \qquad (\mathbf{2})$$

Donde a esta suma de $\boldsymbol{k}$ términos se le conoce en la literatura clásica matemática como «*Descomposición en Fracciones Simples*» y cada fracción simple del tipo $\boldsymbol{M}_i$ (con $1 \leq i \leq k$) tiene una de las dos formas siguientes: $\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)^m}$ ó $\frac{\boldsymbol{A}_2 x+\boldsymbol{A}_3}{(px^2+qx+r)^n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}^+ \wedge q^2 - 4pr < 0$,

donde los $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}$ son coeficientes a determinar (Díaz: ob. cit., 26-27).

Para obtener la descomposición $(\mathbf{2})$ primero se debe expresar el denominador $g(x)$ como un producto de factores de la forma $(ax + b)$ o expresiones cuadráticas irreducibles de la forma $(px^2 + qx + r)$. Después se agrupan los factores repetidos de manera que $g(x)$ quede expresado como un producto de factores distintos de la forma $(ax+b)^m$ ó $(px^2+qx+r)^n$; donde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ y $(px^2 + qx + r)$ es irreducible. Luego, se aplican las siguientes reglas:

**1**.- Por cada uno de los factores de la forma $(ax+b)^m$ (con $m \geq 1$) la descomposición (**2**) contiene una suma de $m$ fracciones parciales de la forma:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(ax+b)} + \frac{\boldsymbol{A}_2}{(ax+b)^2} + \frac{\boldsymbol{A}_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}_{m-1}}{(ax+b)^{m-1}} + \frac{\boldsymbol{A}_m}{(ax+b)^m}$$

donde cada $\boldsymbol{A}_i$ (con $i = 1, 2, \ldots, m$) es un número real a determinar.

**2**.- Por cada uno de los factores de la forma $(px^2+qx+r)^n$ (con $n \geq 1 \wedge q^2 - 4pr < 0$) la descomposición (**2**) contiene una suma de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1 x + \boldsymbol{B}_1}{(px^2+qx+r)} + \frac{\boldsymbol{A}_2 x + \boldsymbol{B}_2}{(px^2+qx+r)^2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}_n x + \boldsymbol{B}_n}{(px^2+qx+r)^n}$$

donde cada $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ (con $i = 1, 2, \ldots, n$) son números reales a determinar.

Tomando en cuenta la factorización del denominador de $h(x)/g(x)$ y las reglas dadas en los incisos (**1**) y (**2**) algunos libros de cálculo desarrollan el caso de interés para este artículo de la siguiente forma, ver (Zill, 2011; Purcell, 2007; Steward, 2012).

Factores lineales no repetidos:

$$\frac{\boldsymbol{A}_1}{(a_1x+b_1)} + \frac{\boldsymbol{A}_2}{(a_2x+b_2)} + \frac{\boldsymbol{A}_3}{(a_3x+b_3)} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}_n}{(a_nx+b_n)}$$

En ese sentido, la literatura especializada tiene una variedad de técnicas para calcular los coeficientes $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ (con $1 \leq i \leq n$) como, por ejemplo, la técnica no tradicional llamada método de «*Heaviside*» (Martínez, $2006$) y los métodos tradicionales conocidos con los nombres «*Coeficientes Indeterminados*» y «*Hermite-Ostrogradsky*».

Siguiendo la idea de las técnicas para calcular los coeficientes $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ que aparecen en los distintos numeradores de las fracciones más simples (o parciales), en esta investigación se concibió una *técnica alternativa* con enfoque algebraico para calcular dichos valores donde su principal atractivo es no requerir de *sistemas de ecuaciones*. A continuación, se muestra los algoritmos de la *técnica alternativa* para calcular los coeficientes $\boldsymbol{A}_i$ y $\boldsymbol{B}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ de la *descomposición en fracciones simples* en el caso de *factores lineales no repetidos*.

**Técnica Alternativa**

En este apartado se presentan los algoritmos para desarrollar el caso de «*factores lineales no repetidos*». Para una mejor comprensión del lector este problema fue dividido en dos subproblemas, ver (Hernández, $2024$).

$\mathbf{1}$- Dos factores lineales de tipo básico y ninguno se repite. Supóngase que se tiene;

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d})} \quad \text{donde } b, d \in \mathbb{R}. \qquad (\mathbf{3})$$

*Algoritmo 1*. Hacer la adición de fracciones:

$$\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+d}=\frac{d-b}{(x+b)(x+d)} \ .$$

Multiplicar ambos miembros por $1/(d-b)$

$$\frac{1}{(x+b)(x+d)}=\left(\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+d}\right).$$

Al realizar la propiedad distributiva del producto con respecto a la adición se obtiene la *descomposición en fracciones simples*;

$$\frac{1}{(x+b)(x+d)}=\left(\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+b}\right)+\left(-\frac{1}{d-b}\right)\left(\frac{1}{x+d}\right). \quad \blacksquare$$

Donde; para este caso, los coeficientes a determinar quedan de la forma:

$$\boldsymbol{A_1}=\frac{1}{d-b} \ \text{ y } \ \boldsymbol{A_2}=-\frac{1}{d-b} \ .$$

**2**- Dos factores lineales de tipo general y ninguno se repite. Supóngase que se tiene;

$$\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{d})} \quad \text{donde } a,b,c,d \in \mathbb{R}. \qquad (\mathbf{4})$$

*Algoritmo 2*.

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\left(\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}\right)\left(\frac{1}{ad-bc}\right)=$$

$$\left(\frac{a}{ad-bc}\right)\left(\frac{1}{ax+b}\right)-\left(\frac{c}{ad-bc}\right)\left(\frac{1}{cx+d}\right).$$

Si $\boldsymbol{A_1}=\frac{a}{ad-bc}$ y $\boldsymbol{A_2}=\frac{c}{ad-bc}$ entonces la *descomposición en fracciones* es:

$$\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{\boldsymbol{A_1}}{ax+b}-\frac{\boldsymbol{A_2}}{cx+d} \quad \text{con } \boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2}\in\mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

## Teoría APOE y la técnica alternativa

*Desarrollo General de la Investigación*. La instrucción se llevó a cabo con estudiantes cursantes de la unidad curricular *cálculo* $II$ en la Facultad de Ciencias y Tecnología (FaCyT) de la Universidad de Carabobo. Siguiendo el ciclo $ACE$ antes descrito. Se repitió el trabajo de enseñanza e investigación durante $5$ semestres ($2020$-$2022$) hasta lograr la $DG$ del presente trabajo.

A continuación, se muestra la $DG$ para un caso particular de la *descomposición en fracciones simples*. Es decir, el numerador de la fracción a descomponer es distinto de la unidad; en este caso se hace referencia a un polinomio en la variable "$x$" de grado uno.

**Tabla 1**

*Conocimientos previos para la descomposición genética*

| | |
|---|---|
| - Objeto "Fracción"<br>- Objeto "Fracción Propia"<br>- Objeto "Fracción Impropia"<br>- Objeto "Fracción Simple"<br>- Objeto "Número Real" | - Proceso "Adición de Fracciones"<br>- Proceso "Producto de Fracciones"<br>- Proceso "Adición de Números Reales"<br>- Proceso "Factorización"<br>- Proceso "Algoritmo de la División" |

Fuente: Hernández ($2024$)

*Caso de Estudio*. Realizar la *Descomposición en Fracciones Simples* para:

$$\frac{\boldsymbol{\alpha\, x+\beta}}{(\boldsymbol{a\, x+b})(\boldsymbol{c\, x+d})}\ . \qquad (\mathbf{5})$$

*Desencapsular* el *objeto* “Fracción” con el objetivo de realizar el *proceso* de descomponer la fracción en el producto de dos fracciones. Esto se logra al aplicar la “Propiedad Asociativa” para el producto de fracciones y al visualizar la existencia del “Elemento Neutro” multiplicativo.

La fracción anterior es equivalente a $(\alpha\, x+\beta)\left[\frac{1}{(a\, x+b)(c\, x+d)}\right]$.

Realizar la *acción* de construir las siguientes fracciones básicas:

$$\frac{1}{a\, x+b} \quad \text{y} \quad \frac{1}{c\, x+d}\ . \qquad (\mathbf{I})$$

Realizar la *acción*, sobre las fracciones anteriores, de expresarlas como la siguiente resta:

$$\frac{1}{a\, x+b} - \frac{1}{c\, x+d} =$$

*Desencapsular* el *objeto* “Número Real” y el *objeto* “Fracción” con el objetivo de aplicar una técnica cualquiera para el *proceso* “Resta de Fracciones” y el *proceso* “Operación de Resta de Números Reales”. Para ello se aplicará la “Propiedad Distributiva” en el numerador de la fracción y se aplicará la *acción* de eliminar los paréntesis

$$\frac{(c\, x+d)-(a\, x+b)}{(a\, x+b)(c\, x+d)} = \frac{cx+d-ax-b}{(a\, x+b)(c\, x+d)} =$$

Seguidamente, se realizará el *proceso* “Propiedad Conmutativa” en el numerador de la fracción anterior para obtener:

$$\frac{cx - ax + d - b}{(a\,x + b)(c\,x + d)} =$$

Realizar el *proceso* “Propiedad Asociativa” en el numerador de la fracción anterior

$$\frac{(cx - ax) + d - b}{(a\,x + b)(c\,x + d)} =$$

Finalmente, realizar el *proceso* “Propiedad Distributiva” en el numerador $\frac{(c-a)x+d-b}{(a\,x+b)(c\,x+d)}$.

Se observa que; al hacer la operación de resta de las fracciones aparecen términos que dependen de $x$, en el numerador. Para resolver esta situación se realiza la *acción* de modificar las fracciones básicas en $(\mathbf{I})$ para obtener las nuevas fracciones:

$$\frac{a}{a\,x + b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{c\,x + d} \quad . \qquad (\mathbf{II})$$

*Interiorizar* la *acción* de restar las fracciones en $(\mathbf{I})$ para darse cuenta que se debe mantener el mismo orden entre el minuendo y sustraendo para la resta de las fracciones en $(\mathbf{II})$

$$\frac{a}{a\,x + b} - \frac{c}{c\,x + d} =$$

Realizar el *proceso* “Operación de Resta” de las fracciones (aquí se trabaja sobre el *objeto* “Fracción”) Para ello se aplicará la “Propiedad Distributiva” en el numerador de la fracción (se trabaja sobre el *objeto* “Número Real”)

$$\frac{a(cx+d)-c(ax+d)}{(a\,x+b)(c\,x+d)}=\frac{acx+ad-cax-cd}{(a\,x+b)(c\,x+d)}\;=$$

Seguidamente; se realizará el *proceso* “Propiedad Conmutativa” y cancelación de términos semejantes en el numerador de la fracción anterior (se trabaja sobre el *objeto* “Número Real”)

$$\frac{ad-cd+acx-acx}{(a\,x+b)(c\,x+d)}=\frac{ad-cb}{(a\,x+b)(c\,x+d)}$$

Realizar la *acción* de multiplicar ambos miembros de la igualdad por la constante $1/(ad-cb)$ (se trabaja sobre el *objeto* “Número Real”)

$$\frac{1}{ad-cb}\left[\frac{ad-cb}{(a\,x+b)(c\,x+d)}\right]=\frac{1}{ad-cb}\left(\frac{a}{a\,x+b}\quad-\quad\frac{c}{c\,x+d}\right).$$

Realizar el *proceso* de multiplicación de fracciones. Para ello, se aplica: la “Propiedad del Inverso Multiplicativo”, la “Propiedad Distributiva” y la “Propiedad Conmutativa para el Producto” (se trabaja sobre el *objeto* “Fracción”)

$$\frac{1}{(a\,x+b)(c\,x+d)}=\frac{a}{ad-bc}\left(\frac{1}{a\,x+b}\right)-\frac{c}{ad-bc}\left(\frac{1}{c\,x+d}\right).$$

Aplicar la *acción* de multiplicar ambos miembros de la igualdad por $\alpha\,x+\beta$

$$(\alpha\,x+\beta)\frac{1}{(a\,x+b)(c\,x+d)}$$
$$=(\alpha\,x+\beta)\left[\frac{a}{ad-bc}\left(\frac{1}{a\,x+b}\right)-\frac{c}{ad-bc}\left(\frac{1}{c\,x+d}\right)\right].$$

Realizar el *proceso* “Propiedad Distributiva” sobre la fracción anterior para obtener;

$$\frac{\alpha\,x+\beta}{(a\,x+b)(c\,x+d)}=\frac{a}{ad-bc}\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{a\,x+b}\right)-\frac{c}{ad-bc}\left(\frac{\alpha\,x+\beta}{c\,x+d}\right).$$

Aplicar el *proceso* “Algoritmo de la División” de polinomios. Al usar dicho algoritmo en:

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{a\, x+b} \quad \text{y} \quad \frac{\alpha\, x+\beta}{c\, x+d}$$

se tiene;

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{a\, x+b}=\frac{a}{ad-bc}\left[\frac{\frac{\alpha}{a}(\,a\, x+b)+\beta-\frac{\alpha b}{a}}{a\, x+b}\right]. \qquad (\mathbf{6})$$

En forma análoga, se trabaja con la otra expresión;

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{c\, x+d}=\frac{c}{ad-bc}\left[\frac{\frac{\alpha}{c}(\,c\, x+d)+\beta-\frac{\alpha d}{c}}{c\, x+d}\right]. \qquad (\mathbf{7})$$

*Coordinar* los *procesos* $(\mathbf{6})$ y $(\mathbf{7})$ para realizar la agrupación de los términos respectivos. *Encapsular* el *proceso* anterior para obtener, finalmente, el *objeto* “*Descomposición en Fracciones Simples*” de este caso de estudio;

$$\frac{\alpha\, x+\beta}{(a\, x+b)(c\, x+d)}=\frac{a\left(\beta-\frac{\alpha b}{a}\right)}{ad-bc}\left(\frac{1}{a\, x+b}\right)-\frac{c\left(\beta-\frac{\alpha d}{c}\right)}{ad-bc}\left(\frac{1}{c\, x+d}\right), \quad \blacksquare$$

donde los coeficientes a determinar son los números reales $\frac{a\left(\beta-\frac{\alpha b}{a}\right)}{ad-bc}$ y $\frac{c\left(\beta-\frac{\alpha d}{c}\right)}{ad-bc}$ (Hernández, $2024$).

## Conclusiones

La teoría $APOE$ y su elemento principal; la $DG$, pueden considerarse como un punto de convergencia de diferentes profesionales; matemáticos, ingenieros y/o educadores, cuya labor está relacionada con la enseñanza de las matemáticas, y deseen mejorar sus prácticas de enseñanza, o aportar a la investigación en Educación Matemática.

Al apoyar este estudio en la noción de esquema, según la teoría $APOE$, se observan aquellas relaciones en las que hay que hacer mayor énfasis en la docencia y se proporcionan indicadores de cómo hacerlo. La modelación de la $DG$ utilizada (en esta investigación) para describir la práctica del profesor permite dar cuenta de cómo éste construye las situaciones de aula para que los estudiantes puedan llegar a organizar la colección de *objetos* y *procesos* que constituyen el *esquema* de la noción de *descomposición en fracciones simples*.

La $DG$ de esta investigación permite reflexionar sobre el cómo explicar y desarrollar el concepto de *descomposición en fracciones simples*, usando la *técnica alternativa*, en clases para activar en los estudiantes procesos tales como reflexión, abstracción, síntesis, y generalización, que generan la encapsulación de la definición. Así mismo, contribuye a conocer las características de la comprensión del concepto del objeto matemático de estudio. Los resultados de esta investigación proporcionan evidencias que muestran que cuando se diseña una estrategia didáctica basada en una teoría de *Educación Matemática*, es posible superar las dificultades encontradas en otras investigaciones y se discute, además, cuáles son las causas de algunas de las dificultades encontradas.

En ese sentido, los resultados permitieron concluir que; sí es posible diseñar una estrategia didáctica en la que se favorezcan las construcciones necesarias para el aprendizaje del concepto de *descomposición en fracciones simples* mediante actividades diseñadas con la teoría $APOE$.

La relación inicial entre elementos previos y un nuevo concepto determina la construcción del conocimiento matemático, por las relaciones que pueden establecerse. Cuando estas relaciones no se dan por la ausencia de los mecanismos de asimilación y reacomodación, los conceptos son simplemente mecanizados por los individuos sin que haya una verdadera comprensión de los mismos. Por tanto, la estructuración del conocimiento lógico-matemático se ve afectada por dichos factores, ya que, lo que se aprende se va incorporando a las nuevas construcciones o reconstrucciones de un cierto conocimiento.

Para finalizar, una de las bondades que ofrece la *técnica alternativa* mostrada en esta investigación es la libertad que tiene el aprendiz al usar su creatividad en la solución de algún problema de índole matemático donde sea necesaria la DFS.

## Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Alemania: Springer.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). “A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education”. *Research in collegiate mathematics education*. (Vol. 2, N° 3, p. 1-32).

Chrystal, G. (1961). *Textbook of algebra*. (Vol. part one). Dover Publications.

Díaz, J. (2017). “Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales”. *El Cálculo y su Enseñanza.* (Vol. 9, N° 1, p. 24-41).

Fuentealba, C. (2017). *Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios*. [Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona]. Disponible en: https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/458677/cfa1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y [05-09-2024]

Haaser, N., LaSalle, J. y Sullivan, J. (1974). *Análisis Matemático 1: Curso de introducción*. México: Editorial Trillas.

Hernández, F. (2024). *Aproximación Teórica para la Descomposición en Fracciones Simples y su efecto en el Rendimiento Académico Inmediato. Una Estrategia Didáctica Alternativa y la Modelación Matemática*. [Tesis Doctoral, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico “Rafael Alberto Escobar Lara” de Maracay].

Huang, X. (1991). “A shortcut in partial fractions”. *The College: Mathematics Journal.* (N° 22, p. 413-415).

Martínez, A. (2006). “Descomposición en Fracciones Parciales”. *Scientia et Technica*. (Año XII, N° 31, p. 259-264).

Pérez, F. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable*. España: Universidad de Granada.

Purcell, E. (2007). *Cálculo.* (9ª ed.). Pearson Educación.

Rodríguez, M. (20 de febrero de 2021). *Imágenes conceptuales, modelos mentales y Teoría* $APOS$ [Archivo de Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=GyfsLxknlB4 [05-09-2024]

Rodríguez, M., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2018). “Construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$". *Revista Latinoamericano de Investigación Matemática*. (Vol. 21, N° 1, p. 57-86)

Steward, J. (2012). *Calculus.* (7ª ed.). Cengage.

Trigueros, M. (2005). “La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior”. *Educación Matemática.* (Vol. 17, N° 1, p. 5-31). Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517101 [05-09-2024]

Zill, D. (2011). *Cálculo de una variable.* (4ª ed.). Mc Graw-Hill.